

L'asymétrie moyenne est quasiment nulle et ce quelle que soit la maturité. De ce fait, on peut raisonnablement considérer que l'asymétrie du rendement est nulle. Par contre le kurtosis moyen est nettement supérieur à 3 (de 4 à 7) pour toutes les maturités envisagés. Ce coefficient traduit l'épaisseur des queues de distributions. Plus ce coefficient est élevé plus les probabilités de rendement extrêmes sont importants. Les risques encourus sont donc plus grands que ceux retranscrits dans les hypothèses de Black et Scholes. Il est donc nécessaire de corriger la volatilité historique avant de l'utiliser dans la formule de Black et Scholes.

## § 5 - Proposition de correction de la "volatilité historique Black et Scholes"

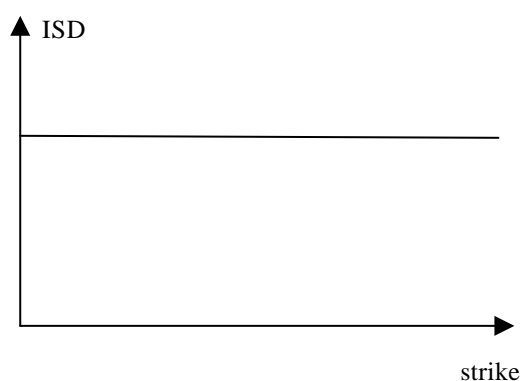
En 1982, Jarrow et Rudd ont proposé une formule d'évaluation des options prenant en compte la distribution empirique du sous-jacent et non la distribution log-normale. L'application du modèle nécessite le calcul de la skewness et du kurtosis de la distribution de la valeur du sous-jacent. Nous rappelons tout d'abord les différentes formes de *smile* générées par les valeurs de la skewness et du kurtosis puis nous exposons le modèle de Jarrow et Rudd avant de l'appliquer.

### A - Les différentes formes de *smile*

Nous présentons les différentes formes de *smile*, pour une échéance donnée et en fonction du *strike*, obtenues sur les marchés en fonction des valeurs des coefficients d'asymétrie et de kurtosis.

#### a. *Skewness* = 0 et *kurtosis* = 3

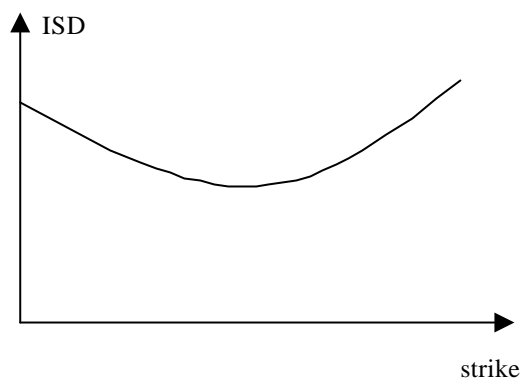
Il s'agit du flat *smile* de Black et Scholes :



où ISD (*Implied Standard Deviation*) est la volatilité implicite.

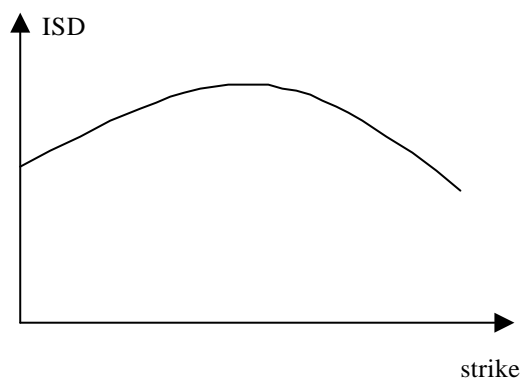
*b. Skewness = 0 et kurtosis > 3*

Le *smile* de volatilité implicite Black et Scholes a cette fois la forme d'un U :



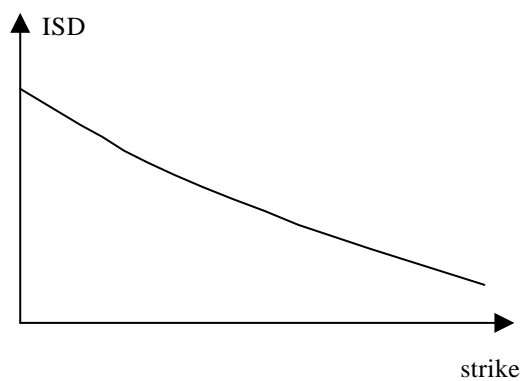
*c. Skewness = 0 et kurtosis < 3*

Le *smile* de volatilité implicite Black et Scholes a cette fois la forme d'un U renversé :



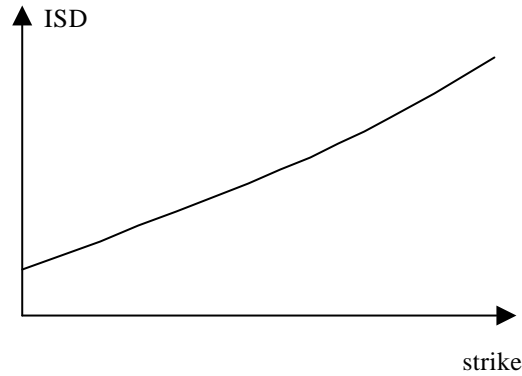
*d. Skewness < 0*

Le *smile* de volatilité implicite Black et Scholes a cette fois la forme d'une courbe décroissante :



e. *Skewness* > 0

Le *smile* de volatilité implicite Black et Scholes a cette fois la forme d'une courbe croissante :



La courbure des fonctions de volatilités implicites dépend du coefficient de Kurtosis. Nous avons choisi dans ces deux derniers cas une orientation U. Ce sens de courbure correspond au cas le plus fréquemment rencontré dans la réalité, lorsque les queues de distribution sont plus épaisses que celle d'une loi normale centrée réduite.

#### B - Le modèle de Jarrow et Rudd

Supposons que dans l'univers risque-neutre, le processus de diffusion du prix de l'actif risqué  $S$  soit un mouvement brownien géométrique :

$$\frac{dS}{S} = r dt + \sigma d\hat{Z},$$

où  $\sigma$  désigne la volatilité du rendement de l'actif,  $r$  le taux sans risque et où  $\hat{Z}$  est un brownien standard.

Sous cette hypothèse, la densité<sup>175</sup>, la dérivée partielle première et la dérivée partielle seconde de la distribution lognormale du prix de l'actif risqué à l'instant  $t$  sont données par :

- $a(S_t) = \frac{C_1 C_5}{S_t} \times \exp\{C_2 [\ln S_t]^2\} \times \exp\{C_4 \ln S_t\}$
- $\frac{\partial a(S_t)}{\partial S_t} = \frac{a(S_t)}{S_t} [2C_2 \ln(S_t) + C_4 - 1]$
- $\frac{\partial^2 a(S_t)}{\partial S_t^2} = \frac{\partial a(S_t)}{\partial S_t} \left[ \frac{\partial a(S_t)}{\partial S_t} \frac{1}{a(S_t)} - \frac{1}{S_t} \right] + 2C_2 \frac{a(S_t)}{S_t}$

<sup>175</sup> La densité doit être numériquement calculée à partir de l'exponentielle d'une somme et non à partir d'un produit d'exponentielle en raison des erreurs numériques.

$$\text{où } C_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} ; C_2 = \frac{-1}{2\sigma^2 t} ; C_3 = \ln(S_0 e^{rt}) - \frac{\sigma^2 t}{2} ; C_4 = -2C_2 C_3 \text{ et } C_5 = \exp(C_2 C_3^2).$$

Nous rappelons que sous la probabilité risque-neutre, le prix d'un *call* européen C est égal à l'espérance actualisée du *payoff* à l'exercice. Si la densité de probabilité de l'actif sous-jacent est lognormale, le prix de l'option correspond au prix Black et Scholes. En revanche, si la densité de probabilité n'est pas lognormale, le prix Black et Scholes inclut un biais. Jarrow et Rudd proposent de corriger ce biais à l'aide d'un développement en série d'Edgeworth. Trois approximations peuvent être faites afin de calculer le prix de l'option. Nous retenons celle égalisant les deux premiers moments centrés de la distributions réelles et de la distribution lognormale. Sous cette hypothèse, le prix d'un *call* peut être réécrit selon Jarrow et Rudd de la façon suivante<sup>176</sup> :

$$C_{JR} = C_{BS} + \lambda_1 Q_3 + \lambda_2 Q_4$$

où  $C_{JR}$  est égal au prix du *call* selon la formule de Jarrow et Rudd,  $C_{BS}$  est égal au prix du *call* selon la formule de Black et Scholes,  $\lambda_1 = \gamma_1(D_{réelle}) - \gamma_1(D_{\log N})$ ,  $\lambda_2 = \gamma_2(D_{réelle}) - \gamma_2(D_{\log N})$ ,

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} \text{ le coefficient d'asymétrie et } \gamma_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 \text{ le coefficient d'aplatissement de Fisher,}$$

tous deux calculés pour la distribution réelle  $D_{réelle}$ , où  $\mu_j$  est égal au  $j^{\text{ème}}$  moment centré, tandis que pour la distribution lognormale  $D_{\log N}$ , on a  $\gamma_1(D_{\log N}) = 3q + q^3$  et  $\gamma_2(D_{\log N}) = 16q^2 + 15q^4 + 6q^6 + q^8$  avec  $q^2 = e^{\sigma^2 t} - 1$ .

### C - Extraction du *smile* de volatilité historique implicite Black et Scholes

Les études réalisées par Corrado et Su avaient pour but d'extraire l'ensemble des paramètres implicites de la formule de Jarrow et Rudd, à partir des prix des options observés sur le marché. Dans le cas qui nous concerne, nous ne pouvons pas procéder de la sorte puisque nous devons fournir les prix. En revanche, nous pouvons calculer la distribution des cours et en déduire un *smile* de volatilité Black et Scholes historique. Par exemple, à partir des données datant du 01/01/95 au 10/04/97, il est possible de calculer différents prix d'option en fonction du *strike* selon la formule de Jarrow et Rudd et d'en déduire la volatilité Black et Scholes implicite.

<sup>176</sup> CORRADO C. et SU T., "Implied Volatility Skews and Stock Index Skewness and Kurtosis Implied by S&P 500 Index Options Prices", *The Journal of Derivatives*, 1997, summer.

### a.Extraction de la volatilité

Dans ce paragraphe, nous présentons les deux techniques envisagées ici dans l'extraction de la volatilité implicite. Il s'agit de la méthode numérique de Newton Raphson d'une part et de la méthode analytique de Chance d'autre part.

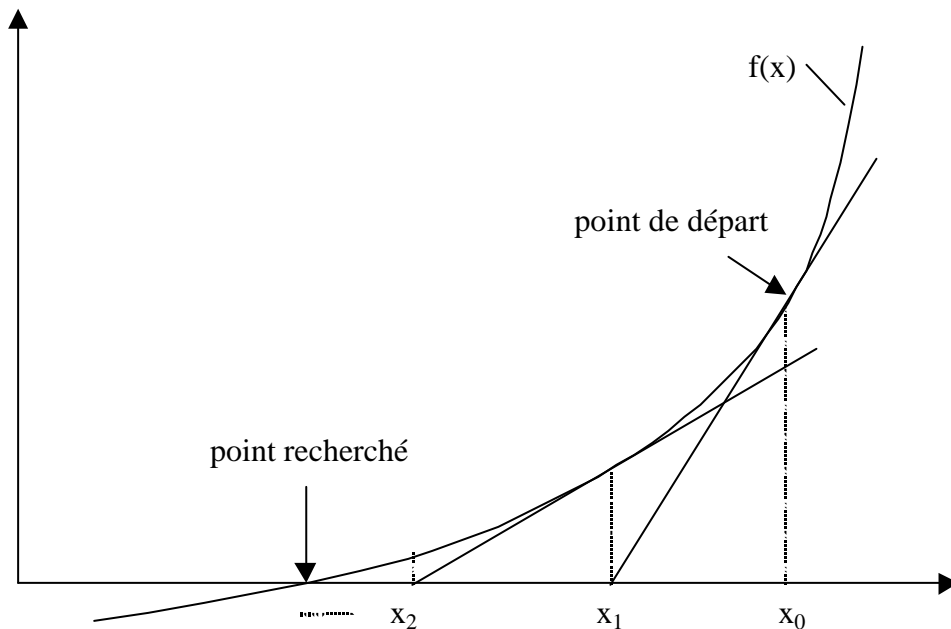
#### 1 - Extraction numérique de la volatilité

Les formules de Black et Scholes pour les options vanilles sont des bijections entre le prix et la volatilité. De la sorte, il est possible d'utiliser les méthodes numériques pour extraire la volatilité implicite en connaissant le prix de l'option, ce qui n'est pas systématiquement le cas pour les options exotiques. Parmi les deux principales méthodes pour résoudre le problème : la dichotomie et la méthode de Newton-Raphson, c'est cette dernière qui est la plus rapide en temps d'exécution.

La mise en œuvre de cette approche nécessite le calcul du vega (i.e. de la dérivée du prix de l'option par rapport à la volatilité). Nous notons  $V$  le prix de l'option. Après calcul, il vient :

$$\frac{\partial V}{\partial s} = \frac{S\sqrt{t}e^{-d_1^2/2}}{\sqrt{2p}}$$

La méthode de Newton-Raphson utilise la tangente de la fonction pour résoudre le problème du type  $f(x) = 0$ . Le graphique suivant en rappelle le principe :



## 2 - Extraction analytique de la volatilité

Chance propose une extraction analytique de la volatilité Black et Scholes plus générale que celle présentée par Brenner et Subrahmanyam. La technique mise en œuvre repose sur une prolongation analytique de la formule de Brenner et Subrahmanyam. Nous nous attachons maintenant à la rappeler. Dans la suite de l'exposé de la méthode, le prix *spot*  $S$  d'une option à la monnaie  $c^*$  (par la suite le signe  $*$  dénote les caractéristiques de l'option à la monnaie) est défini par le prix d'exercice  $K$  actualisé :  $S = Ke^{-rt}$ .

La formule de Brenner et Subrahmanyam pour la volatilité implicite est :

$$\hat{s}^* = \frac{c^* \sqrt{2p}}{S \sqrt{t}}$$

L'extension proposé par Chance est obtenue à l'aide d'une forme quadratique.

Soit  $c$  le prix d'une option. Ce prix peut être décomposé en deux parties, l'une étant le prix de l'option à la monnaie  $c^*$ , l'autre étant un terme correctif  $\Delta c^*$  :

$$c = c^* + \Delta c^*$$

A l'aide d'un développement de Taylor à l'ordre 2, il est possible d'obtenir la déviation de la volatilité implicite :

$$\Delta \hat{s}^* = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4aq}}{2a}$$

où :

- $\Delta \hat{s}^* = \hat{s} - \hat{s}^*$
- $\Delta K^* = K - K^*$
- $a = \frac{1}{2} c_{ss}^*$
- $b = c_{s^*}^* + c_{s^* K^*}^* (\Delta K^*)$
- $q = c^* - c + c_{K^*}^* (\Delta K^*) + \frac{1}{2} c_{K^* K^*}^* (\Delta K^*)^2$

Les dérivées sont aisément calculées :

- $c_{K^* K^*}^* = \frac{e^{-rt} e^{-d_2^{*2}/2}}{K^* s^* \sqrt{2pt}}$
- $c_{s^* K^*}^* = -\frac{S e^{-d_1^{*2}/2} d_1^*}{K^* s^* \sqrt{2pt}}$

$$\bullet \quad c_{s^*}^* = \frac{S\sqrt{t}e^{-d_1^{*2}/2}}{\sqrt{2p}}$$

$$\bullet \quad c_{s^*s^*}^* = -\frac{S\sqrt{t}e^{-d_1^{*2}/2}}{\sqrt{2p}} \left( \sqrt{t} - \frac{d_1^*}{s^*} \right)$$

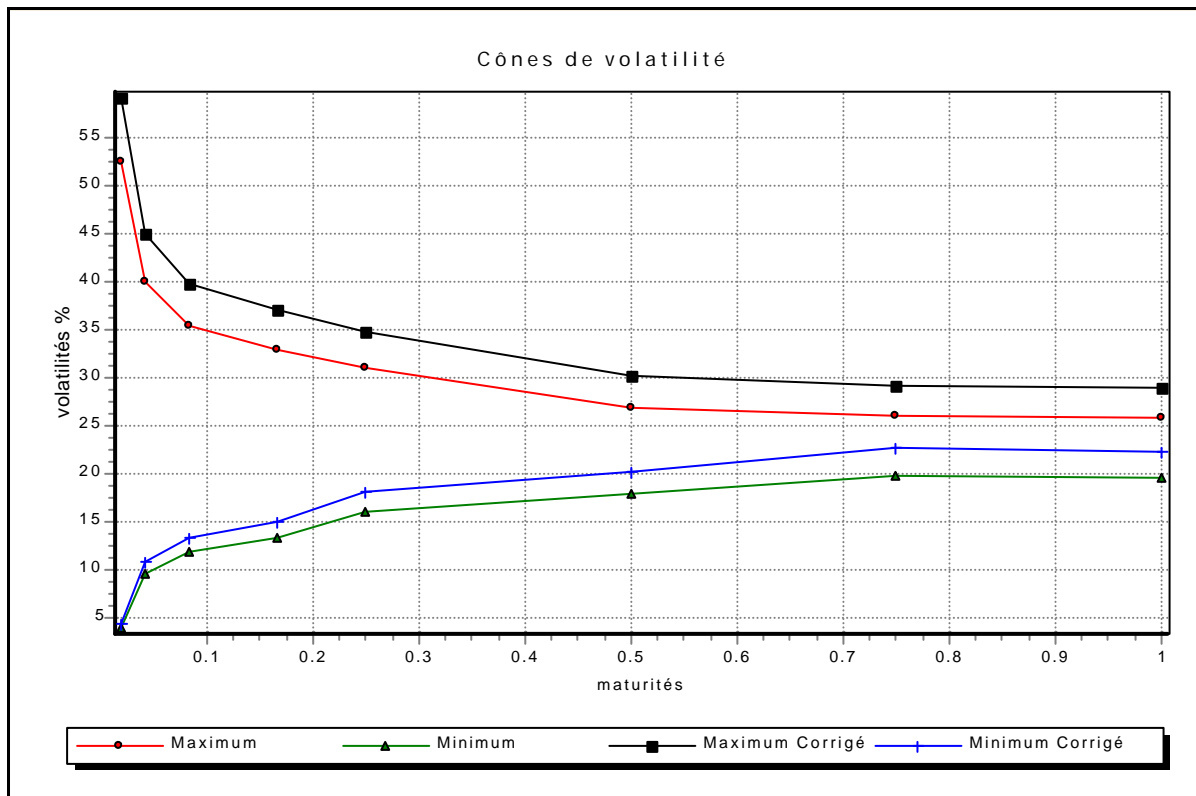
Bien qu'intéressante, cette méthode ne donne pas des résultats suffisamment précis pour être appliquée sur les marchés et ce même avec un développement limité de Taylor plus élevé (ce qui, par ailleurs, complique nettement la résolution).

En conclusion, la méthode de Chance permet d'obtenir un point de départ proche de la solution mais pas suffisamment pour les intervenants du marché. La méthode de Newton Raphson donne donc de meilleur résultat mais avec des temps de calculs plus élevés notamment en raison du point initial choisi. Par conséquent, la méthode de Chance pourrait permettre d'obtenir une approximation de ce point initial. C'est cette méthode conjuguée que nous mettrons en œuvre.

#### D - Mise en œuvre

A partir des données mentionnées précédemment pour le cours de la Société Générale, nous avons corrigé le cône de volatilité en fonction de plusieurs paramètres.

Tout d'abord, en supposant que les taux sont constants et valent 2%, que le prix d'exercice est égal au prix *spot*, le cône de volatilité corrigé est :



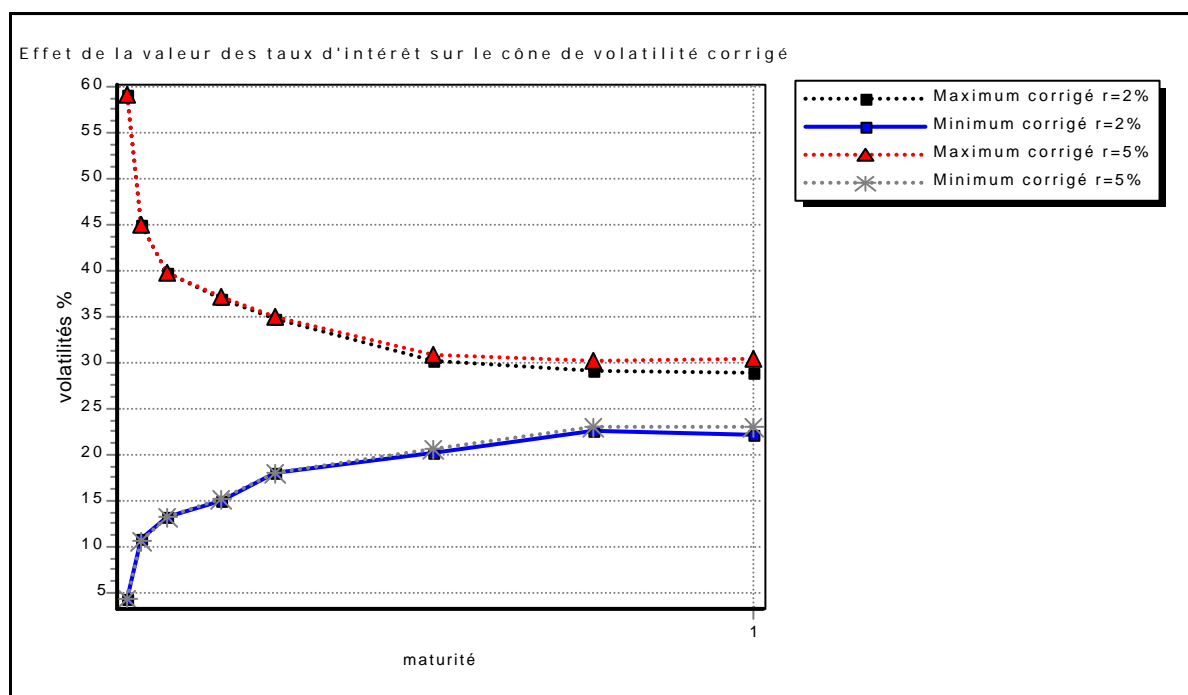


Les volatilités corrigées sont nettement supérieures aux volatilités historiques. Le tableau ci-dessous donne les valeurs obtenues :

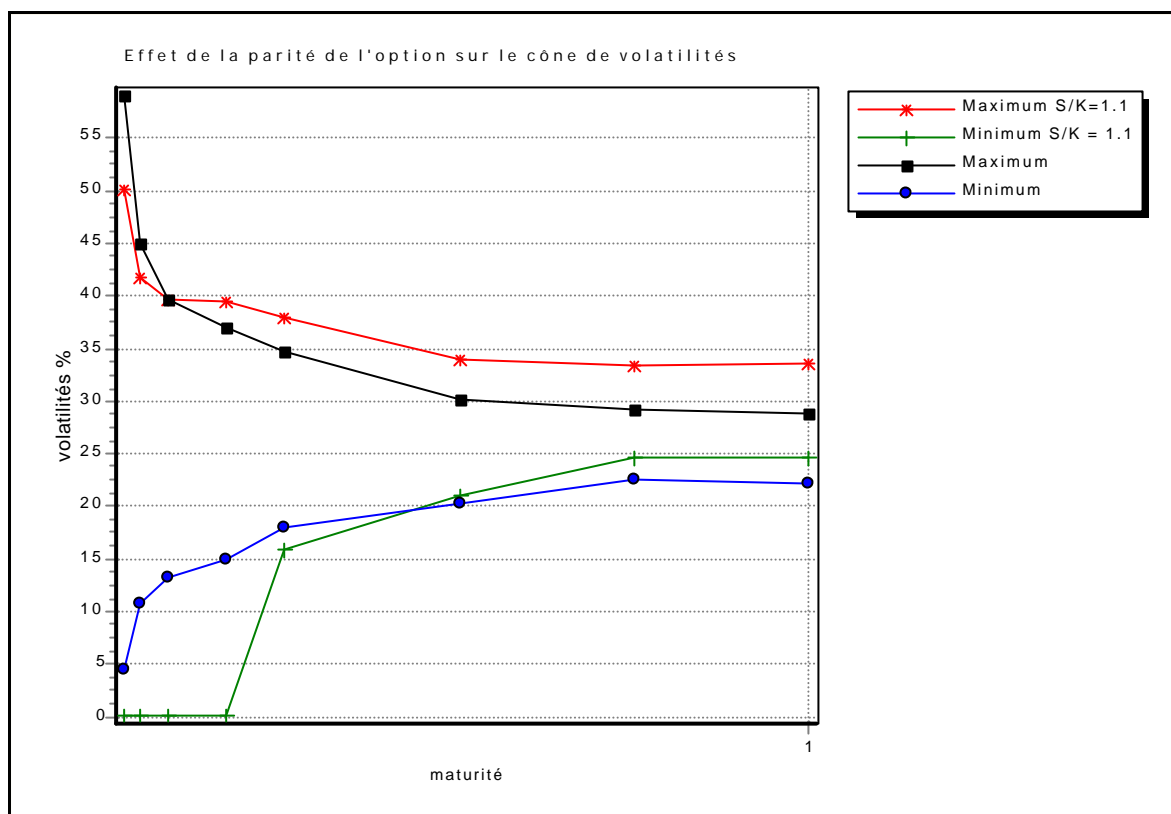
maturité	Maximum %	Maximum Corrigé %	Minimum %	Minimum Corrigé %
1 semaine	52.50	59.09	3.92	4.40
1 quinzaine	40.02	45.03	9.62	10.85
1 mois	35.30	39.75	11.78	13.19
2 mois	32.95	37.02	13.31	14.95
3 mois	30.91	34.68	15.93	18.08
6 mois	26.86	30.18	17.89	20.22
9 mois	25.92	29.21	19.79	22.57
1 an	25.77	28.82	19.44	22.18

Les écarts entre les volatilités historiques et les volatilités corrigées sont très importants. Pour la volatilité 1 an, le maximum est de 25.77 % tandis que le maximum de la volatilité corrigée est de 28.82 %, soit une différence absolue de 3.05 % de volatilité. Au niveau des prix Black et Scholes cela se traduit par un écart de prix d'option d'environ 10 %.

Dans le cas envisagé, plus les taux d'intérêt sont élevés, plus les volatilités corrigées sont grandes :



Le cône a été corrigé en considérant des options au pair. Pourtant les effets du prix d'exercice de l'option sont conséquents sur la volatilité historique implicite :



Le rapport  $S/K = 1.1$  signifie que le prix *spot* est égal à 1.1 fois le prix d'exercice.

Le tableau suivant fournit les valeurs obtenues en pourcentage :

maturité	Maximum S/K=1.1	Maximum	Minimum S/K = 1.1	Minimum
1 semaine	50.11	59.09		4.40
1 quinzaine	41.71	45.03		10.85
1 mois	39.75	39.75		13.19
2 mois	39.56	37.02		14.95
3 mois	38.00	34.68	15.93	18.08
6 mois	33.90	30.18	21.01	20.22
9 mois	33.31	29.21	24.72	22.57
1 an	33.50	28.82	24.72	22.18

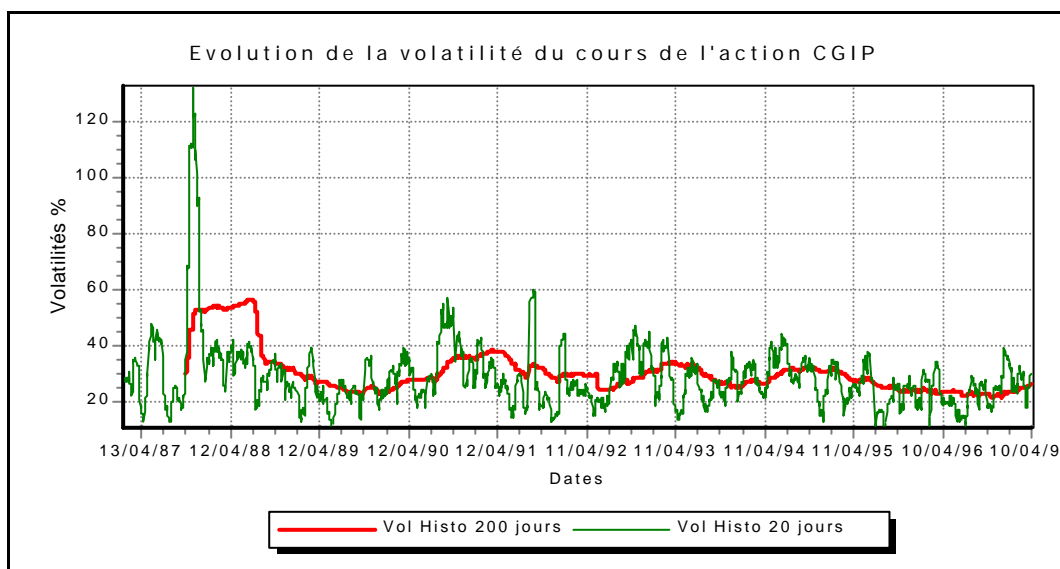
Les courbes de volatilités peuvent se croiser. Pour les maturités faibles, la volatilité minimale Black et Scholes implicite peut ne pas exister.

Les cônes de volatilités corrigés dépendent à la fois de la maturité et du *strike* des options. En considérant la moyenne des volatilités, la construction du *smile* de volatilités historiques implicites est immédiate. Il est intéressant de noter qu'il est possible de construire des *smiles* maximum et minimum avec des niveaux de confiance différents sur la volatilité.

## SECTION 2. Etude non déterministe du rendement du cours d'une action et de sa volatilité

Les modèles statistiques dérivés du modèle ARCH (autorégressif conditionnellement hétéroscédastique), tiennent une place importante dans l'économétrie des marchés financiers. Un véritable engouement s'est rapidement créé probablement tant pour les finesses mathématiques de telles méthodes que pour les qualités prédictives attendues de ce type de modélisation.

Le graphique suivant représente l'évolution des volatilités 20 jours et 200 jours ouvrés du cours de l'action CGIP au cours de la période datant du 01/01/87 au 10/04/97.



La lecture du graphique montre que les volatilités sont des fonctions aléatoires.

Dans la section précédente, l'étude était en partie menée sur la distribution des volatilités des différentes maturités. Le but recherché était d'obtenir un *smile* de volatilités historiques Black et Scholes afin d'en déduire des intervalles de confiance portant sur les valeurs passées et futures de la volatilité.

Dans les modèles hétéroscédastiques, la volatilité n'est pas une fonction déterministe, mais stochastique. Elle évolue dans le temps de manière imprévisible. Les courbes de volatilités tracées ci-dessus laissent présager, la présence d'une hétéroscédasticité forte des rendements logarithmiques journaliers (jours ouvrés) de l'action CGIP.

Principalement pour une meilleure gestion des risques, certains praticiens ont adopté les processus de type ARCH. L'avantage de ce principe de modélisation appliquée à la finance est d'estimer selon un niveau de confiance donné un intervalle de valeurs probables d'un indice (un cours, une volatilité,...) sous l'hypothèse de dynamiques de prix non linéaires.

En 1990, Nelson<sup>177</sup> faisait la relation entre les modèles ARCH à temps discret et les modèles en temps continu. Dans cette section, l'étude du rendement des actions est faite à partir des processus ARMA (autorégressif à moyenne mobile) puis GARCH (ARCH généralisé) à l'aide du logiciel SAS<sup>178</sup> pour la partie estimative. Les tests sont effectués avec le cours de l'action CGIP entre le 01/01/87 et le 10/04/97.

## § 1 - Vérification de l'hypothèse d'autocorrélation

### A - Dans le cas du rendement

Dans la première section, l'hypothèse d'autocorrélation du rendement logarithmique journaliers (jours ouvrés) des prix de l'action Société Générale avait été rejetée visuellement. Il existe cependant des tests statistiques permettant de rejeter ou non l'hypothèse d'autocorrélation des cours. Le test généralisé de Durbin-Watson est souvent utilisé à cette fin.

La mise en œuvre du test de Durbin - Watson à l'ordre 1 avec SAS conduit à :

Ordinary Least Squares Estimates					
Durbin-Watson		2.0732	PROB<DW	0.9710	
Variable	DF	B Value	Std Error	t Ratio	Approx Prob
Intercept	1	0.000154	0.000381	0.404	0.6860

Le coefficient de Durbin-Watson DW est égal à :  $DW = 2(1 - \rho)$  où  $\rho$  est le coefficient de corrélation linéaire.

<sup>177</sup> NELSON D., "ARCH Models as Diffusion Approximations", *Journal of Econometrics*, 1990, vol 45.

<sup>178</sup> Les résultats obtenus avec le logiciel SAS sont encadrés.

Le risque pris en déclarant l'hypothèse d'autocorrélation des rendements est égal à 97.10 %. Les rendements de l'action CGIP peuvent être supposés indépendants.

B - Dans le cas de la volatilité

**Le calcul de la volatilité historique effectué sur une période glissante, conduit nécessairement à un important lien entre les volatilités successives.**

Le test de Durbin-Watson confirme bien évidemment la corrélation étroite entre deux volatilités 20 jours successives.

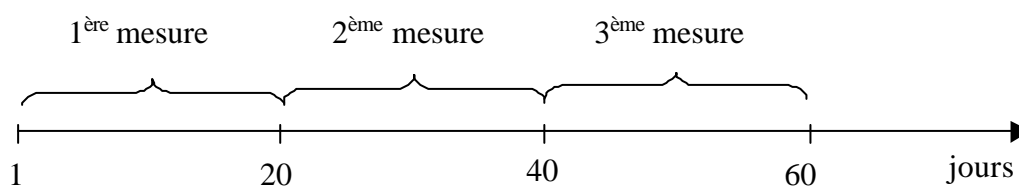
Ordinary Least Squares Estimates					
Durbin-Watson 0.0359					
Variable	DF	B Value	Std Error	t Ratio	Approx Prob
Intercept	1	0.286668	0.00238	120.318	0.0001

Bien entendu, si la volatilité est calculée sur une période encore plus grande, la corrélation augmente :

Ordinary Least Squares Estimates					
Durbin-Watson 0.0016					
Variable	DF	B Value	Std Error	t Ratio	Approx Prob
Intercept	1	0.303977	0.00159	191.439	0.0001

**Plus la base de calcul de la volatilité est importante, plus le processus de la volatilité empirique est autorégressif.**

Les conclusions sont-elles les mêmes dans la conjecture où l'on étudie la moyenne une fois tous les 20 jours des volatilités historiques 20 jours ?



L'étude de la question aboutit au résultat suivant :

Ordinary Least Squares Estimates					
Durbin-Watson 0.9386					
Variable	DF	B Value	Std Error	t Ratio	Approx Prob
Intercept	1	0.286673	0.00956	29.990	0.0001

Le coefficient d'autocorrélation de la série n'est plus qu'égal à 47% à comparer au coefficient 98.21 % de la série des volatilités calculée avec une période glissante. Ce résultat montre que la volatilité empirique 20 jours est autorégressive.

## § 2 - Les processus ARMA

Les processus AR, MA et ARMA ne sont représentatifs que de séries stationnaires ou corrigées des variations saisonnières. Les tests de Dickey-Fuller<sup>179</sup> effectués sur les trajectoires du rendement du cours de l'action CGIP et de sa volatilité vérifient l'hypothèse de stationnarité.

### A - Les processus AR

Un processus  $x_t$  est autorégressif gaussien pur d'ordre  $p$  - AR( $p$ ) - s'il est représenté par la relation linéaire :

$$x_t = a_0 + a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + \dots + a_p x_{t-p} + e_t$$

avec  $e_t$  i.i.d. de loi  $N(0, \sigma_e)$ ,  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_p$  et  $\sigma_e$  des constantes.

Nous conduisons les tests, afin de rejeter ou retenir l'hypothèse selon laquelle les rendements puis les volatilités 20 jours et 200 jours peuvent être modélisés selon un processus AR( $p$ ). Plutôt que d'établir l'ordre des processus à partir de leur autocorrélogramme, nous préférons construire l'étude afin d'expliquer les raisonnements financiers sous-jacents.

<sup>179</sup> Voir BOURBONNAIS R., "Econométrie", DUNOD, 1998, 2<sup>e</sup> édition, Chap 9, "Eléments d'analyse des séries temporelles".

*a. Tests avec un AR(1)*

## 1 - Le rendement

Les résultats obtenus à l'aide de la méthode des moindres carrés sont :

Parameter	Estimate	Std Error	T Ratio	Lag
<b>MU</b>	<b>0. 0001542</b>	<b>0. 0003670</b>	<b>0. 42</b>	<b>0</b>
<b>AR1, 1</b>	<b>- 0. 03693</b>	<b>0. 01931</b>	<b>- 1. 91</b>	<b>1</b>
<b>Constant Estimate = 0. 00015986</b>				

L'estimateur de la moyenne est notée MU. Le T Ratio (Estimate/Std Error) indique la signifiante de la variable. Pour MU, le T Ratio est très faible, la lecture de la table de Student permet d'en déduire que la moyenne est nulle avec une probabilité de 67.44% et que l'estimateur du coefficient  $\mathbf{a}_1$  est significatif à hauteur de 86.21 %.

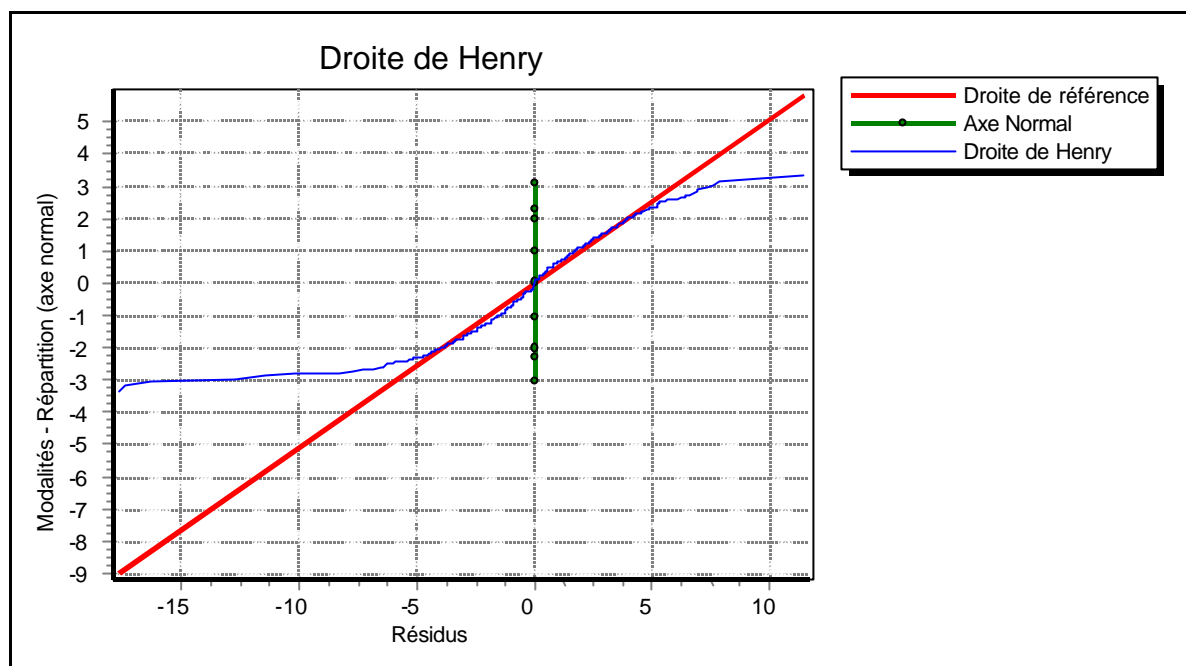
Le modèle ajusté proposé par SAS est :

$$x_t = -0.03693 x_{t-1} + \mathbf{e}_t$$

L'écart type de la variable  $\mathbf{e}_t$  est égal à : 1.9698 %. En conclusion, bien que la variable  $x_{t-1}$  explique en partie la valeur de la variable  $x_t$ , la faible valeur de  $\mathbf{a}_1$  permet de déduire que le bruit blanc explique en grande partie (en fait en quasi-totalité) le rendement.

**Mais**, SAS ne fait pas le test d'adéquation de  $\mathbf{e}_t$  selon une loi normale. Il est pourtant indispensable. Nous proposons d'effectuer un test visuel à l'aide de la droite de Henry<sup>180</sup> :

<sup>180</sup> L'axe Normal est composé de 9 points auxquels correspondent dans l'ordre croissant les probabilités respectives : 0.1%, 1%, 2.3 %, 15.9 %, 50 %, 84.1 %, 97.7 %, 99 % et 99.9%. Sur le graphique, la courbe des fréquences cumulées - qui dans le cas d'une loi normale est une droite - est appelée droite de Henry.



Le test effectué permet "presque" de retenir l'hypothèse de normalités des résidus. Les problèmes se situent au niveau des queues de la distribution.

**Le processus AR(1) semble relativement adapté pour la modélisation du rendement du cours de la CGIP durant la période considérée. Mais il n'explique pas suffisamment l'épaisseur des queues de distribution.**

## 2 - La volatilité

Dans le cas d'un AR(1) et pour la volatilité 20 jours calculée sur une période glissante, on obtient :

Conditional Least Squares Estimation				
Approx.				
Parameter	Estimate	Std Error	T Ratio	Lag
MU	0.33326	0.01850	18.01	0
AR1, 1	0.98431	0.0035147	280.06	1
Constant Estimate = 0.00522819				
Variance Estimate = 0.00053904				
Std Error Estimate = 0.02321717				

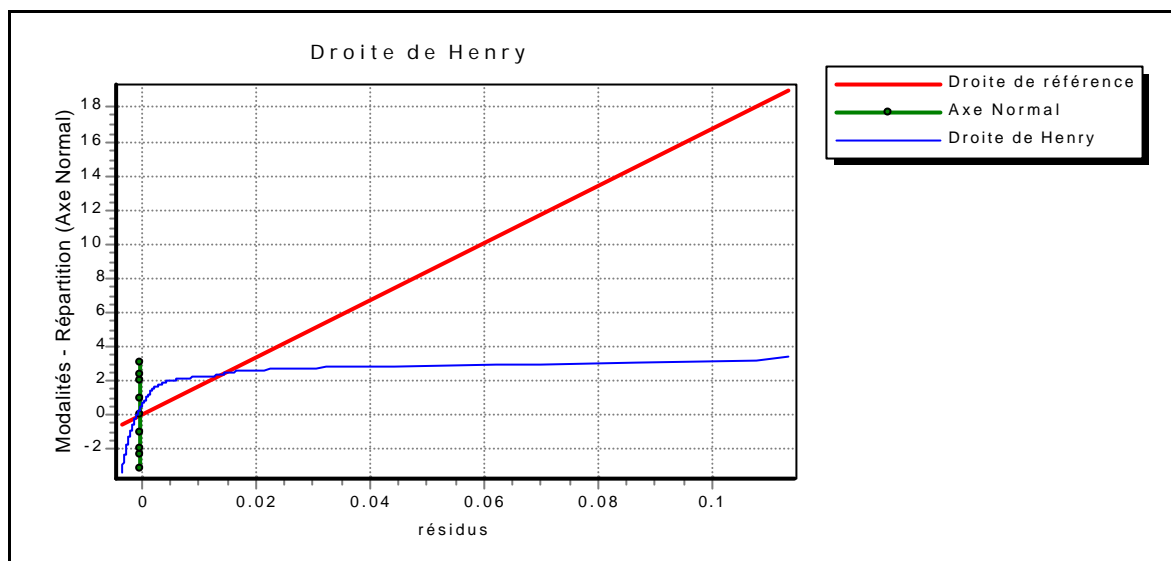


Le processus AR décrivant la série est :

$$x_t = 0.00522819 + 0.98431 x_{t-1} + e_t$$

Et où l'écart type de la variable  $e_t$  est égal à : 2.32 %. La valeur de  $a_1$  égale à 0.98431 montre bien le lien étroit entre les volatilités prises sur une période glissante. Le T-Ratio est exceptionnellement élevé.

Là encore, il est nécessaire de vérifier par la droite de Henry que les résidus sont normalement distribués. Ce n'est pas le cas :



**Le processus AR(1) n'est donc pas adapté pour la modélisation de la volatilité 20 jours du rendement du cours de la CGIP durant la période considérée.**

#### *b. Tests avec un AR d'ordre > 1*

Nous reprenons les tests avec des processus AR d'ordre 2 et 3. Le but est de montrer (sans tracer l'autocorrélogramme) qu'ils ne présentent aucun intérêt supplémentaire par rapport à un processus AR(1).

##### 1 - Le rendement

Puisque, le rendement précédent explique peu le rendement obtenu en t, en augmentant l'ordre du processus AR, l'influence des rendements antérieurs doit être moindre. C'est ce que confirme les tests menés dans le cas d'un AR(2) puis d'un AR (3)

Dans le cas d'un AR(2), les résultats obtenus sont :

**Conditional Least Squares Estimation**

Approx.				
Parameter	Estimate	Std Error	T Ratio	Lag
MU	0.0001545	0.0003752	0.41	0
AR1, 1	-0.03611	0.01932	-1.87	1
AR1, 2	0.02216	0.01932	1.15	2

Constant Estimate = 0.00015667

Variance Estimate = 0.00038797

Std Error Estimate = 0.01969683

Le modèle proposé par SAS est :

$$x_t = 0.00015667 - 0.03611 x_{t-1} + 0.02216 x_{t-2} + e_t$$

Dans le cas d'un AR(3), les résultats obtenus sont :

**Conditional Least Squares Estimation**

Approx.				
Parameter	Estimate	Std Error	T Ratio	Lag
MU	0.0001542	0.0003719	0.41	0
AR1, 1	-0.03591	0.01933	-1.86	1
AR1, 2	0.02183	0.01934	1.13	2
AR1, 3	-0.0091181	0.01933	-0.47	3

Constant Estimate = 0.00015777

Variance Estimate = 0.00038808

Std Error Estimate = 0.01969969

Le modèle proposé par SAS est :

$$x_t = 0.00015777 - 0.03591 x_{t-1} + 0.02183 x_{t-2} - 0.0091181 x_{t-3} + e_t$$

La valeur absolue des coefficients  $\alpha$  diminue au fur et à mesure avec leur signification.

Le test de Durbin-Watson montre que les rendements ne sont pas autocorrélés. Les tests de normalité de la distribution des résidus montrent que le calage par les processus AR(p) semble relativement approprié.

## 2 - La volatilité

Le processus AR(1) n'est pas adapté au cas de la modélisation de la volatilité 20 jours du rendement de l'action CGIP. La prise en compte de valeurs antérieures supplémentaires peut améliorer la modélisation en raison du lien étroit entre les volatilités prises sur une période glissante. Les résultats obtenus sont :

Conditional Least Squares Estimation				
Parameter	Estimate	Std Error	T Ratio	Lag
<b>MU</b>	<b>0.33085</b>	<b>0.01790</b>	<b>18.48</b>	<b>0</b>
<b>AR1, 1</b>	<b>1.04573</b>	<b>0.01937</b>	<b>54.00</b>	<b>1</b>
<b>AR1, 2</b>	<b>-0.06262</b>	<b>0.01936</b>	<b>-3.23</b>	<b>2</b>
Constant Estimate = 0.00558845				
Variance Estimate = 0.00053713				
Std Error Estimate = 0.02317604				

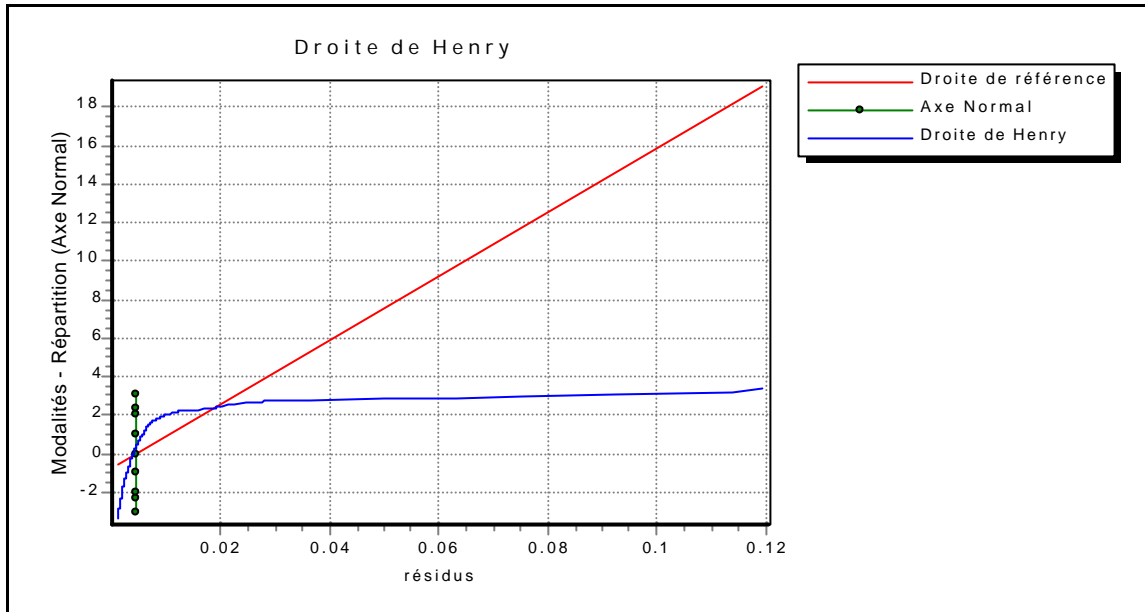
Soit un processus AR(2) défini par :

$$x_t = 0.00053713 + 1.04573 x_{t-1} - 0.06262 x_{t-2} + e_t$$

avec  $e_t \sim N(0, 2.32\%)$ .

Les T Ratio sont assez élevés sauf pour le coefficient  $a_2$ . La valeur du coefficient  $a_1$  est quasi certaine, mais celle du coefficient  $a_2$  est peu sûre.

Le test de Henry sur la normalité des résidus donne :



Comme le processus AR(1), le processus AR(2) est rejeté. La conduction des tests pour les processus AR d'ordres supérieurs amènent à refuser l'hypothèse de modélisation de la volatilité historique 20 jours selon un AR(p).

## B - Les processus ARMA

Avant de définir le processus ARMA, le processus de **moyenne mobile** MA (*Moving Average*) est introduit.

### a. Le processus MA(q)

Lorsque l'on suppose que la variable  $e_t$  n'est pas un bruit blanc, la modélisation alternative usuelle est celle d'un processus à moyenne mobile d'ordre q - MA(q) - :

$$e_t = e'_t + b_1 e'_{t-1} + b_2 e'_{t-2} + \dots + b_p e'_{t-p}$$

où  $b_i$  sont des constantes et  $e'_t$  un bruit blanc.

### b. Le processus ARMA(p,q)

Le processus ARMA d'ordre (p,q) est un processus résultant de la somme d'un processus AR(p) et d'un processus MA(q) :

$$x_t = a_0 + a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + \dots + a_p x_{t-p} + e'_t + b_1 e'_{t-1} + b_2 e'_{t-2} + \dots + b_p e'_{t-p}$$

où les notations sont reprises des définitions précédentes.

Choisir un processus ARMA(p,q) implique l'estimation de nombreux paramètres notamment l'ordre (p,q) du processus. Les processus AR(p) n'étaient pas adaptés à la modélisation de la volatilité du rendement du cours de la CGIP, notamment en raison de la non normalité de la distribution des résidus. Si l'introduction d'un processus à moyenne

mobile peut suffire à accepter l'hypothèse de normalité auquel cas, les processus ARMA(p,q) conviendraient mieux dans la modélisation du processus de volatilité.

En fait, nous savons que les tests effectués avec les processus ARMA échouent car les rendements ne sont pas homoscédastiques :

Q and LM Tests for ARCH Disturbances					
	Order	Q	Prob>Q	LM	Prob>LM
	1	2580. 80	0. 0001	2577. 94	0. 0001
	2	5071. 24	0. 0001	2578. 31	0. 0001
	3	7445. 60	0. 0001	2580. 97	0. 0001
	4	9688. 03	0. 0001	2582. 12	0. 0001
	5	11804. 0	0. 0001	2582. 23	0. 0001
	6	13772. 8	0. 0001	2584. 15	0. 0001
	7	15604. 5	0. 0001	2584. 23	0. 0001
	8	17301. 7	0. 0001	2584. 23	0. 0001
	9	18835. 3	0. 0001	2590. 70	0. 0001
	10	20211. 9	0. 0001	2590. 81	0. 0001
	11	21432. 9	0. 0001	2590. 87	0. 0001
	12	22489. 5	0. 0001	2593. 67	0. 0001
Variable	DF	B Value	Std Error	t Ratio	Approx Prob
Intercept	1	0. 286668	0. 00238	120. 318	0. 0001

La colonne Q mentionne les résultats du Q-Test de Portmanteau. Ce test est utilisé pour tester les effets non linéaires présents dans les résidus. Les valeurs de probabilités inférieures à 0.0001 indiquent une forte hétéroscédasticité des rendements.

La colonne LM fait référence au test du multiplicateur de Lagrange employé à même escient. Là encore les probabilités inférieures à 0.0001 montrent la présence d'une forte hétéroscédasticité.

**Les processus ARMA ne sont donc pas adaptés pour modéliser les rendements en raison de la forte hétéroscédasticité mesurée.**

### § 3 - Les processus GARCH

La famille des processus GARCH (autorégressif conditionnellement hétéroscédastique généralisé) est semble-t-il l'une des plus utilisée dans la modélisation de la volatilité du rendement des cours des actifs financiers. Il semble en effet que les rendements mesurés soient hétéroscédastiques à l'image du test précédent.

Comme le signale Mandelbrot<sup>181</sup> en 1963, "*large changes tend to be followed by large changes – of either sign – and small changes tend to be followed by small changes*". Plusieurs raisons expliquent ce phénomène telles que les crises financières et économiques<sup>182</sup>, les périodes d'instabilité des taux d'intérêt et d'inflation<sup>183</sup> mais aussi la fréquence et le volume des transactions opérées sur le marché<sup>184</sup>.

Le modèle GARCH(1,1) introduit par Bollerslev<sup>185</sup> en 1986 a probablement été le plus populaire. Dans ce paragraphe, les processus GARCH(p,q) sont définis. Ils sont appliqués dans la modélisation du rendement du cours d'une action et de la volatilité 20 jours de la CGIP. Le principal avantage est de faire ressortir un lien étroit entre les rendements et la volatilité.

#### A - Définition

Les modèles GARCH(p,q) s'écrivent :

$$x_t = m + e_t$$

$$\text{Avec } E(e_t | I_{t-1}) = 0$$

$$\text{et } \text{Var}(x_t | I_{t-1}) = h_t = c + \sum_{i=1}^q a_i e_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p b_j h_{t-j}$$

où  $m$  est une constante qui représente la tendance,  $c$  un réel représentant le seuil minimum de la variance, les coefficients  $a_i$  représentent la transmission des chocs précédents dans la variance et  $b_j$  représentent le caractère persistant de la volatilité décrit par Mandelbrot.

<sup>181</sup> MANDELBROT B., "The Variation of Certain Speculative Prices", *Journal of business*, 1963, vol 36.

<sup>182</sup> Voir SCHWERT G., "Business Cycles, Financial Crises and Stock Volatility", *Working Paper*, University of Rochester, 1988.

<sup>183</sup> FAMA E. et SCHWERT G., "Asset Return and Inflation", *Journal of Financial Economics*, 1977, vol 5.

GLOSTEN L., JAGANNATHAN R. et RUNKLE D., "Relationship Between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return", *Banking Research Center, Working Paper N° 166*, Northwestern University, Evanston, IL.

<sup>184</sup> GOURIEROUX C., JASIAK J. et LE FOL G., "Intraday Market Activity", CREST DP 9633, 1996.

<sup>185</sup> BOLLERSLEV T., "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity", *Journal of Econometrics*, 1986, vol 31.

Les tests que nous effectuons sous SAS sont réduits à l'hypothèse d'une normalité conditionnelle. Les processus GARCH que nous envisageons sont donc restreints par l'hypothèse suivante :

$$\mathbf{e}_{t|I(t-1)} \approx N(0, h_t)$$

## B - Application au rendement de la CGIP

L'estimation des paramètres du processus GARCH(1,1) des rendements des cours de la CGIP effectuée avec le logiciel SAS donne :

GARCH Estimates					
		Normality Test 1884.232		Prob>Chi - Sq 0.0001	
Variable	DF	B Value	Std Error	t Ratio	Approx Prob
Intercept	1	0.000168	0.000357	0.472	0.6371
ARCH0	1	0.000025414	3.022E-6	8.410	0.0001
ARCH1	1	0.077561	0.00705	11.006	0.0001
GARCH1	1	0.853145	0.0141	60.499	0.0001

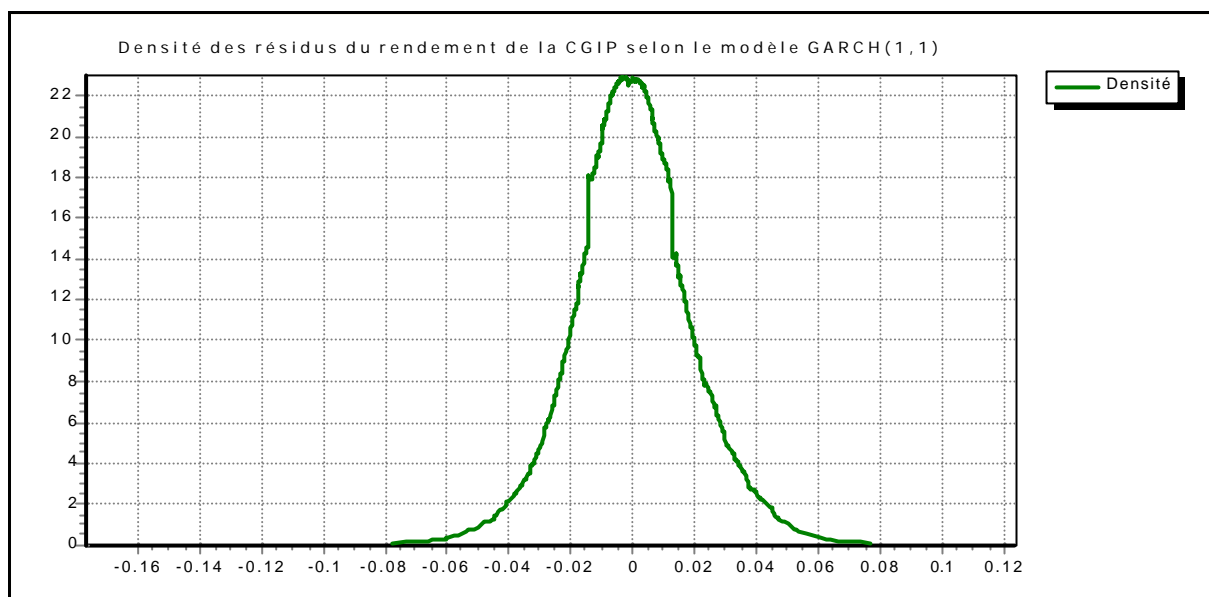
L'équation du processus  $R_t$  du rendement s'écrit :

$$R_t = 0.016837 \% + \mathbf{e}_t$$

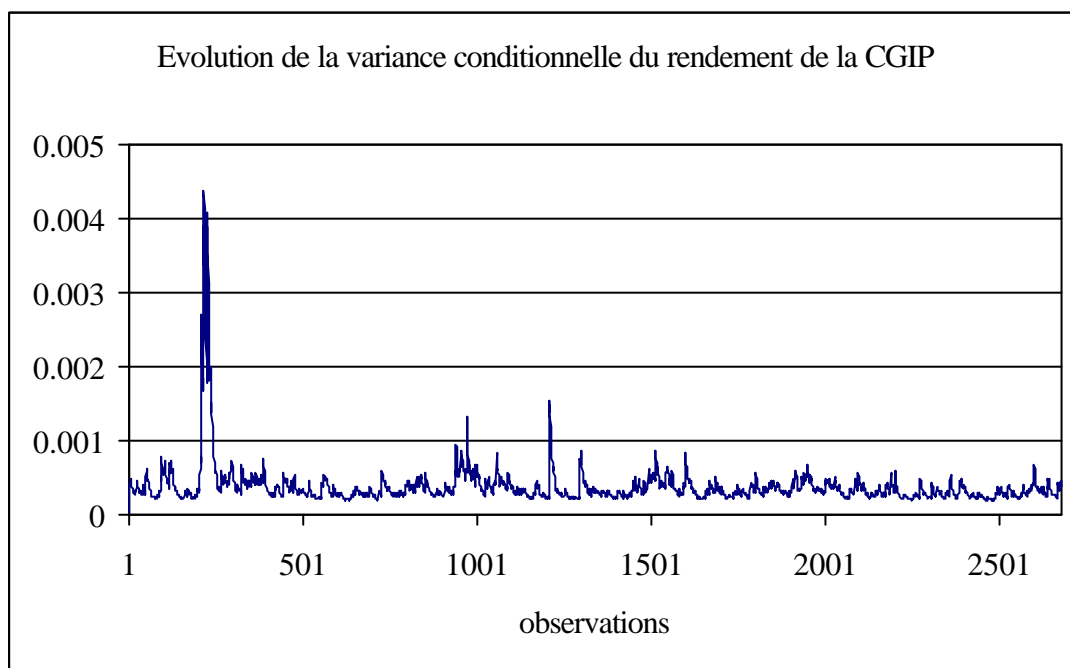
$$\text{Avec } E(\mathbf{e}_t | I_{t-1}) = 0$$

$$\text{et } \text{Var}(R_t | I_{t-1}) = h_t = 0.000025414 + 0.077561 \mathbf{e}_{t-1}^2 + 0.853145 h_{t-1}$$

Le densité des résidus est :

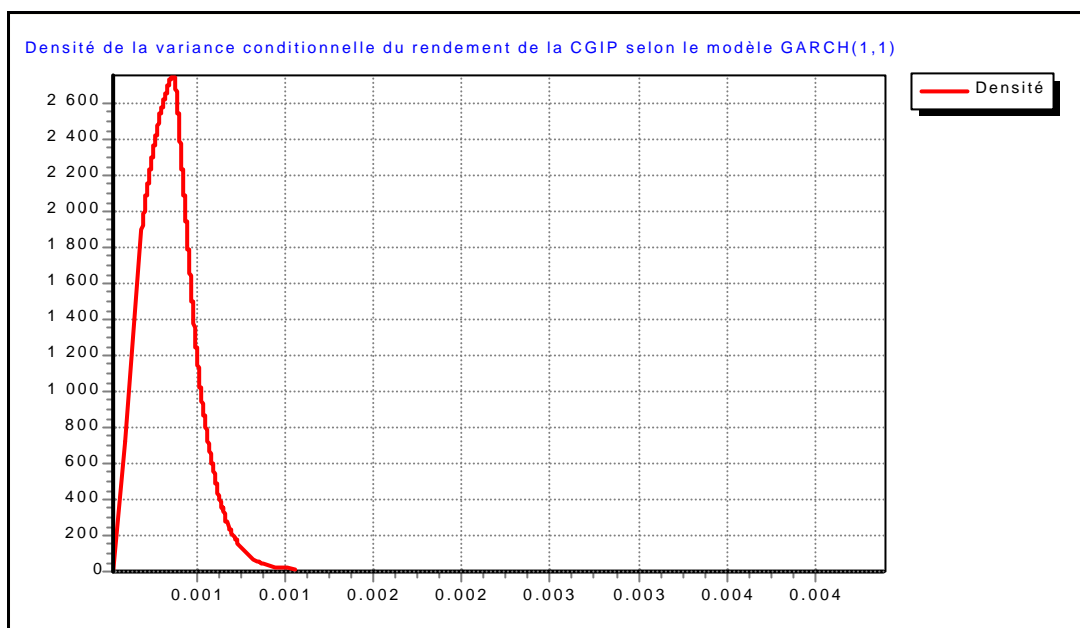


La variance conditionnelle  $h_t$  des rendements évolue de la façon suivante :



La densité des variances conditionnelles  $h_t$  est asymétrique :





Ces graphiques montrent bien la très forte hétéroscédasticité du processus des rendements.

C - Mise en œuvre spécifique du processus GARCH – Extraction du *smile* de volatilité historique Black et Scholes

#### *a. Mise en œuvre spécifique du processus GARCH*

Supposons que l'on désire évaluer le prix d'un *call* asiatique sous l'hypothèse d'un rendement du type GARCH(1,1). Après avoir estimé les paramètres du processus GARCH(1,1), il est possible à l'aide de la méthode des simulations de Monte Carlo de générer plusieurs trajectoires du rendement et donc des prix de l'action<sup>186</sup>.

Dans l'univers risque-neutre, tout actif risqué doit rapporter le taux sans risque. Le rendement logarithmique des prix d'une action est égal au taux sans risque  $r$  multiplié par la longueur de la période  $\Delta t$  :  $r \times \Delta t$ . Le rendement moyen  $m$  du processus GARCH doit par conséquent être remplacé par la rémunération du taux sans risque au cours de la période :  $r \times \Delta t$ <sup>187</sup>.

Les premières valeurs  $e_0$  et  $h_0$  servant à initialiser le processus sont les dernières calculées dans l'estimation du processus GARCH. Il suffit ensuite de procéder à des simulations des bruits blancs. Les processus GARCH ont pour réputation d'être assez peu

<sup>186</sup> Le modèle trinomial de Ritchken et Trevor, op. cit ou la résolution numérique de l'E.D.P. peuvent aussi être mis en œuvre.

<sup>187</sup> Cf. CHUAN J, "The GARCH Option Pricing Model", *Mathematical Finance*, 1995, Vol 5.

stables. Nous avons mis en œuvre la simulation d'un processus GARCH(1,1) avec les données calculées dans le cas de la CGIP :

$$R_t = 0.016837 \% + e_t$$

$$\text{Avec } E(e_t | I_{t-1}) = 0$$

$$\text{et } \text{Var}(R_t | I_{t-1}) = h_t = 0.000025414 + 0.077561 e_{t-1}^2 + 0.853145 h_{t-1}$$

avec notamment  $e_0$  et  $h_0$  pris égaux respectivement à : 0.00636404 et 0.000380528.

Avec 100 simulations, l'adéquation trouvée par SAS peut être très éloignée du processus mis en œuvre :

GARCH Estimates					
Normality Test		0.7712	Prob>Chi - Sq		0.6801
Variable	DF	B Value	Std Error	t Ratio	Approx Prob
Intercept	1	-0.001485	0.00175	-0.849	0.3961
ARCH0	1	0.000287	0.000047	6.156	0.0001
ARCH1	1	0.005648	0.0896	0.063	0.9497
GARCH1	1	-1.39587E-24	9.77E-12	-0.000	1.0000

Il faut de nombreuses simulations, 15000 ici, pour que l'adéquation réalisée par SAS soit systématiquement correcte :

GARCH Estimates					
Normality Test		6.5581	Prob>Chi - Sq		0.0377
Variable	DF	B Value	Std Error	t Ratio	Approx Prob
Intercept	1	0.000030520	0.000147	0.208	0.8352
ARCH0	1	0.000027558	3.473E-6	7.934	0.0001
ARCH1	1	0.084873	0.00642	13.224	0.0001
GARCH1	1	0.838924	0.0138	60.862	0.0001

Ce problème est lié à une instabilité forte reconnue des processus GARCH. De nombreuses périodes doivent être considérées pour les méthodes de simulations de Monte Carlo.

*b.Extraction du smile de volatilité historique Black et Scholes*

L'extraction du *smile* de volatilités historiques Black et Scholes est identique à celle présentée dans la première section. A partir des prix calculés pour différentes maturités et prix d'exercice par la méthode des simulations sous l'hypothèse d'un processus GARCH, on calcule la volatilité implicite à partir de l'autre méthode d'évaluation.

L'intérêt d'interpoler et d'extrapoler les valeurs des options réside dans la lenteur des calculs effectués à partir des méthodes de Monte Carlo liée à l'instabilité des processus GARCH. Aussi après avoir calculées quelques volatilités implicites il devient possible par interpolation des prix (ou des volatilités implicites) de calculer le prix de l'option sans avoir recours à la méthode de Monte Carlo.

Il existe de nombreux autres modèles permettant de spécifier le rendement et la volatilité tels que les ARCH exponentiels, les ARCH Multiplicatifs, les ARCH non linéaires, les GARCH non linéaires asymétriques... Les études réalisées<sup>188</sup> montrent que les pouvoirs prédictifs de ce type de modèle sont limités au cours terme et que ces processus sont particulièrement instables : "Les modèles ARCH paraissent apporter de l'information sur les volatilités ... la stabilité des modèles laisse parfois à désirer". Enfin selon Gouriéroux<sup>189</sup>, "Importants par l'analyse de risques qu'ils permettent, ils constituent vraisemblablement une classe transitoire de modèles, une étape avant le développement de méthodes capables d'analyser de façon plus adéquate les évolutions jointes de volumes et de prix, les aspects intrajournaliers et les non-linéarités dues à l'introduction de produit dérivés".

---

<sup>188</sup> Voir par exemple, BOULIER J.F., DANESI V. et SEQUIER P., "Le monde selon GARCH", *QUANTS*, décembre 1994, N°16.

<sup>189</sup> GOURIEROUX C., "Modèles hétéroscédastiques", *Encyclopédie des marchés financiers*, TOME II, Ed Economica, 1997, Article 59.

## CHAPITRE 6. TECHNIQUES DE GESTION AVANCEES

La gestion des options exotiques est nettement plus difficile que celle des options vanilles. Tout d'abord, en raison des caractères américains et/ou path-dependent, les trajectoires de ou des actifs sous-jacents déterminent la durée de vie de la plupart des options exotiques. Celle-ci peut être raccourcie soit par un exercice anticipé soit par l'effet d'une barrière.

Ensuite, le delta peut avoir une valeur absolue supérieure à 1. Il devient alors très coûteux de construire un portefeuille delta-neutre. De plus, le delta et par conséquent le levier<sup>190</sup> peuvent être discontinus. La grande valeur du delta et sa discontinuité peut accroître significativement le montant des pertes de l'intervenant.

Aussi, plutôt que de gérer de manière dynamique les positions, il peut s'avérer préférable de créer un portefeuille répliquant dont la composition ne varie que très peu dans le temps. La constitution de ce portefeuille est réalisée à partir d'options vanilles. Carr, Ellis, Gupta et Chou<sup>191</sup> ont largement contribué à l'essor des techniques de duplication statique des options exotiques. Ce résultat est fondamental car il permet, bien que sous des hypothèses restrictives, d'évaluer la plupart des options exotiques à partir d'une somme d'options vanilles.

En conséquence, sous ces hypothèses, l'apport des options exotiques dans l'assurance et la spéculation est limité. Sous des conjectures plus générales, cet apport reste significatif. L'accroissement des volumes de vente de ce type de produits dérivés confirme leur intérêt.

Dans ce chapitre chacun de ces points est repris. La première section est consacrée à la durée de vie moyenne des options. Notre principal apport réside dans l'élaboration d'une technique permettant le calcul de cette durée de vie espérée dans le cadre d'options américaines et exotiques dont l'évaluation peut être produite au sein d'un arbre. La deuxième section montre les difficultés rencontrées dans la couverture dynamique des options exotiques en raison des caractéristiques spécifiques de leur delta. La troisième section est consacrée à

---

<sup>190</sup> L'élasticité d'une option par rapport à son sous-jacent est appelé l'effet de levier. Celui-ci est égal à

$$\frac{dC/C}{dS/S} = d \times \frac{S}{C}.$$

<sup>191</sup> CARR P., ELLIS K. et GUPTA V., "Static Hedging of Path-Dependent Options", Working Paper, Cornell University, 1996.

CARR P., ELLIS K. et GUPTA V., "Static Hedging of Exotic Options", Working Paper, Cornell University, mars 1996.

CARR P. et CHOU A., "Breaking Barriers : Static Hedging of Barrier Securities", Working Paper, novembre 1996.

CARR P. et CHOU A., "Hedging Complex Barrier Options", Working Paper, Avril 1997.

Ces papiers sont téléchargeables à partir du site internet de CARR : "<http://www.math.nyu.edu/research/carrp/>".

l'étude des modèles de réplique statique de Carr, Ellis, Gupta et Chou. Enfin, la dernière section rappelle les apports des options exotiques dans la gestion des risques.

## SECTION 1. La duration

La durée de vie des options américaines peut être égale à la maturité de l'option s'il n'est pas optimal d'exercer de façon anticipée le contrat. Dans le cas des *puts* américains, il existe une frontière de prix en-deçà de laquelle il est optimal d'exercer l'option de manière anticipée. Ainsi, la durée de vie espérée des *puts* américains n'est pas égale à la durée de vie du contrat.

La duration des options a été définie par analogie au terme utilisé pour les obligations<sup>192</sup> en tant que **durée de vie moyenne** des contrats. Cette notion n'est pas limitée aux simples options américaines. Certains contrats exotiques européens ont une échéance incertaine. Dans ce cas, la duration est inférieure à la durée de vie maximale du contrat. La famille des options à barrière présente cette caractéristique.

Le problème pour le gestionnaire est de gérer son portefeuille avec des produits dont l'horizon temporel n'est pas certain. Par exemple, s'il achète un *put up & out* afin d'assurer, à faible coût, pour une échéance donnée, une baisse potentielle de son portefeuille, il suffit que le prix de référence touche la barrière pour que la couverture ne soit plus effective.

### § 1 - Le concept de la duration expliqué avec les options américaines

La durée de vie des options américaines est raccourcie si un exercice anticipé intervient. Afin de calculer la probabilité d'exercice anticipé, nous proposons de construire un arbre binomial d'évaluation du prix de l'option puis un second arbre binomial (appelé arbre des probabilités) permettant le calcul de la probabilité d'exercice anticipé. Nous commençons par expliquer le principe permettant de calculer la probabilité d'exercice anticipé dans l'univers risque-neutre, puis nous énonçons les corrections à apporter pour effectuer le calcul dans l'univers réel. Nous poursuivons en donnant une méthode servant au calcul de la probabilité d'exercice anticipé à une date donnée. Avec quelques adaptations, notre méthode présente l'avantage d'être applicable quel que soit le type de l'option et quel que soit l'arbre d'évaluation utilisé.

---

<sup>192</sup> Cette terminologie est notamment reprise par DOUADY R, "Closed Form Formulas for Exotic Options and their Life Time Distribution", Working Paper, Courant Institute of Mathematical Sciences, septembre 97, p 12.

## A - Calcul de la probabilité d'exercice anticipé dans l'univers risque-neutre

### *a.Méthodologie*

Dans un premier temps, l'arbre binomial de Cox, Ross et Rubinstein<sup>193</sup> est construit. Parallèlement, un second arbre est construit de la façon suivante :

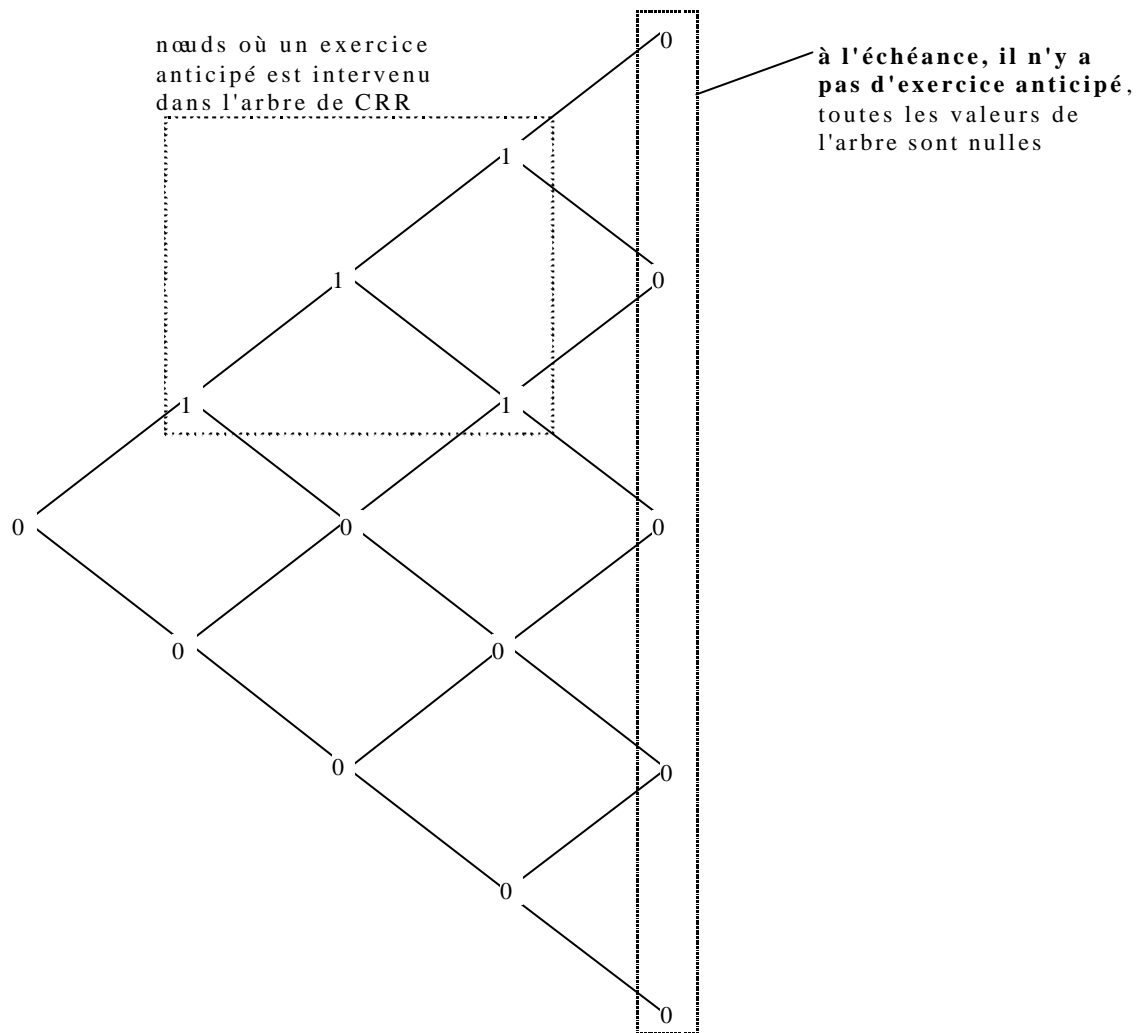
- Les nœuds des deux arbres se correspondent ;
- La valeur initiale des nœuds de l'arbre des probabilités est égale à 1 si le nœud correspondant dans l'arbre de CRR admet un exercice anticipé et 0 ailleurs<sup>194</sup> ;
- La probabilité d'exercice anticipé est calculée en parcourant l'arbre des probabilités récursivement en gardant le maximum entre l'espérance de la valeur des nœuds fils et la valeur intrinsèque du nœud père, c'est -à-dire de la même manière que l'on parcourt l'arbre de CRR.

### Construction de l'arbre des probabilités à l'instant initial :

---

<sup>193</sup> Cf. première partie.

<sup>194</sup> Attention, il ne suffit pas que le prix de l'option européenne dans l'arbre soit différente de celui de l'option américaine. Un exercice anticipé doit avoir lieu réellement.



La seconde étape est la même que celle de CRR avec exercice anticipé, **sans actualiser les probabilités** :

$$P(n,i) = \text{Max}\{P(n,i); [p \times P(n+1,i+1) + (1-p) \times P(n+1,i)]\}$$

où  $P(n,i)$  est la valeur de l'arbre des probabilités à la période  $n$  et après  $i$  hausses du prix du sous-jacent et  $p$  la probabilité de hausse de ce prix dans l'univers risque-neutre.

Pour un *call* (resp. *put*), on appelle la frontière d'exercice anticipé, la valeur minimale (resp. maximale), définie pour chaque date, de l'action pour laquelle un exercice anticipé a lieu. Sous les hypothèses de Black et Scholes, et pour un *call* américain portant sur une action ne versant pas de dividende, cette frontière n'existe pas car aucun exercice anticipé ne peut avoir lieu. En revanche, la frontière d'exercice anticipé d'un *put* américain est continue et non nulle pour toute la durée de vie de l'option.



*b.Illustration*

## 1 - Exemple de mise œuvre

Nous proposons de bâtir un exemple concret de la méthode exposée à l'aide d'un *put* américain.

Les données de l'option sont :

$S = 100$  ;  $K = 100$  ;  $\sigma = 25\%$  ;  $\tau = 1$  an ;  $r = 5\%$  ;  $N = 7$  périodes.

L'arbre d'évolution du prix de l'actif est :

							193.76
						176.29	
				160.39			160.39
			145.93		145.93		
		132.77		132.77			132.77
	120.80		120.80		120.80		
109.91		109.91		109.91			109.91
100.00		100.00		100.00		100.00	
	90.98		90.98		90.98		90.98
		82.78		82.78		82.78	
			75.32		75.32		75.32
				68.53		68.53	
					62.35		62.35
						56.73	
							193.76

L'arbre d'évolution du prix de l'option américaine est :

						0.00
					0.00	
				0.00		0.00
			0.00		0.00	
		0.49		0.00		0.00
	1.93		1.01		0.00	
	4.51		3.48		2.10	0.00
8.23		7.31		6.15		4.35
	12.30		11.47		10.52	9.02
		17.76		17.28		17.22
			24.68		24.68	24.68
				31.47		31.47
					37.65	37.65
						43.27
						48.39

L'arbre initial des probabilités est :

						0
					0	
				0		0
			0		0	
		0		0		0
	0		0		0	
		0		0		0
0		0		0		0
	0		0		0	
		0		0		1
			1		1	0
				1		1
					1	0
						1
						0

L'arbre final des probabilités est :

							0.00
						0.00	
					0.00		0.00
				0.00		0.00	
			0.00		0.00		0.00
		0.06		0.00		0.00	
	0.17		0.11		0.00		0.00
0.33		0.29		0.24		0.00	
	0.51		0.48		0.49		0.00
		0.73		0.74		1.00	
			1.00		1.00		0.00
				1.00		1.00	
					1.00		0.00
						1.00	
							0.00

Annotations : (1,1) pointe vers 0.17 ; (4,-4) pointe vers 1.00 ; (5,-5) pointe vers 1.00.

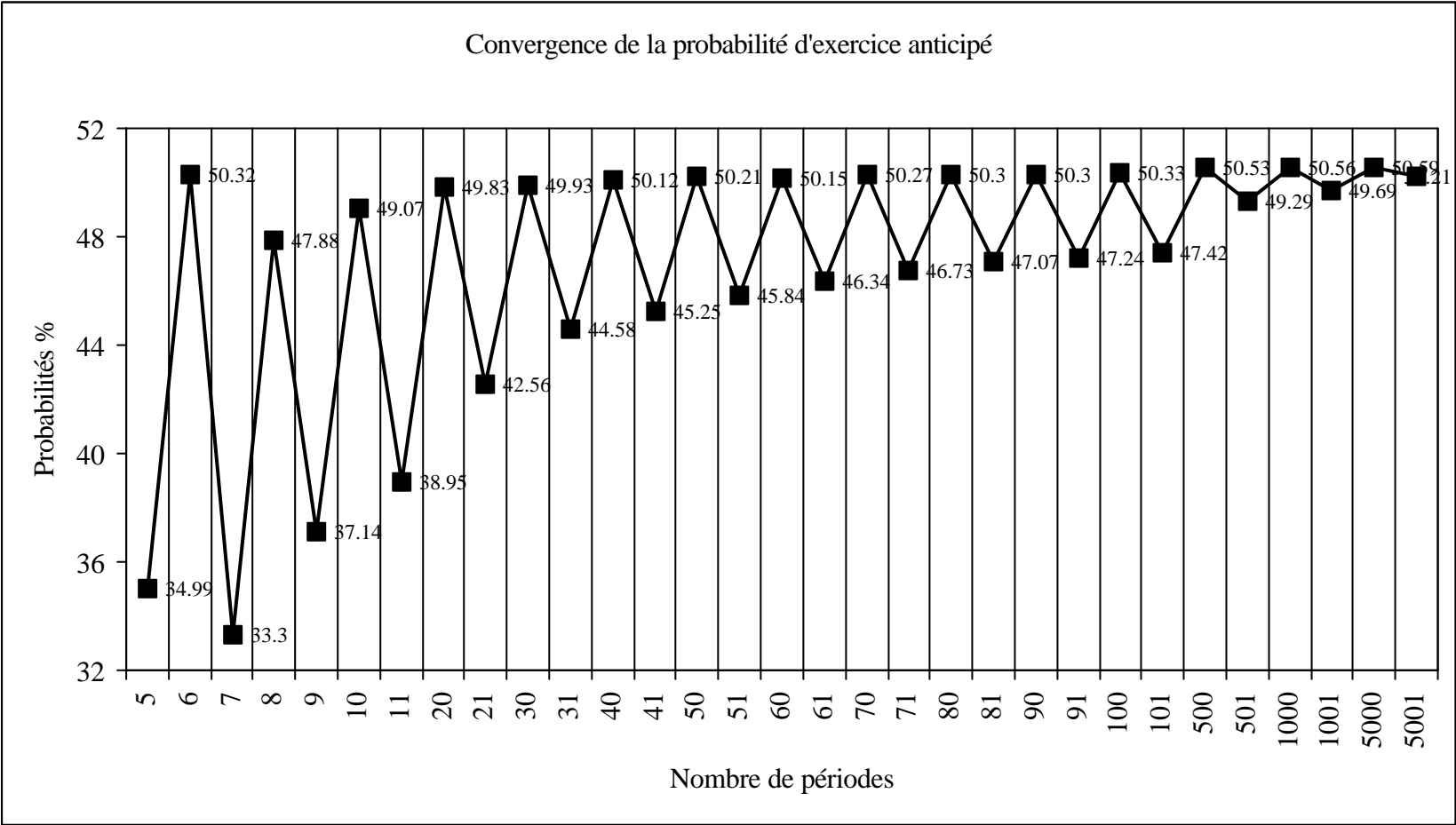
La probabilité calculée (avec 7 périodes), **dans l'univers risque-neutre**, d'exercice anticipé est à l'instant initial égal à environ 33 %. Les probabilités intermédiaires sont des probabilités qui n'ont un sens que si à la date précédente aucun exercice n'a été réalisé. Donnons deux exemples :

- au nœud (1,1), la probabilité d'exercice anticipé dans le futur est égal à 17 %, parce qu'au nœud (0,0) l'exercice n'a pas eu lieu ;
- au nœud (5, -5), la probabilité d'exercice est égal à 1 car il n'est pas tenu compte qu'au nœud (4, -4) l'exercice a déjà eu lieu.

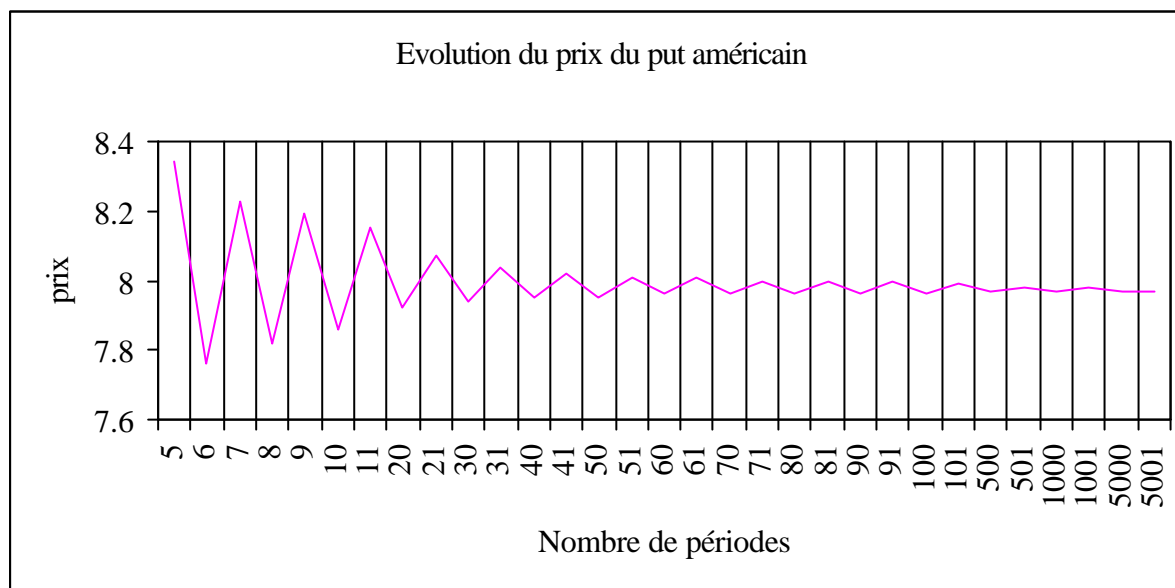
## 2 - convergence

Nous poursuivons l'illustration avec l'exemple précédent dans le but de vérifier la convergence de la méthode.

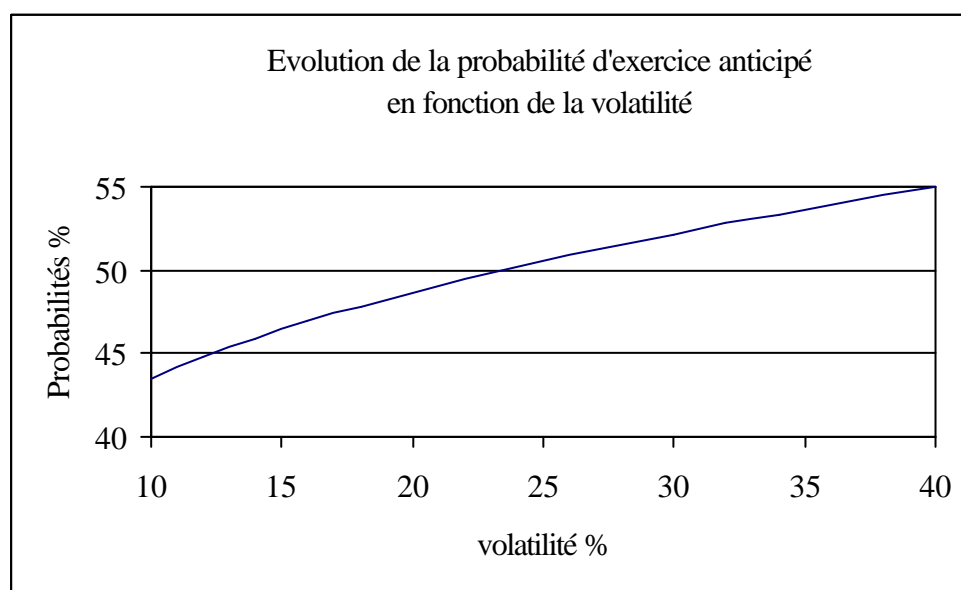
Nous avons calculé plusieurs probabilités en fonction du nombre de périodes. Les résultats sont les suivants :



La probabilité d'exercice anticipé calculée est supérieure pour un nombre de périodes égal à  $2n$ , où  $n$  est un entier naturel, à celle estimée avec un nombre de périodes égal à  $2n+1$ . Si dans l'arbre binomial de CRR, la probabilité d'exercice anticipé est plus grande, cela signifie que le prix de l'option doit être **inférieur** à celui calculé avec une probabilité d'exercice anticipé plus faible. En effet, si un exercice a lieu c'est parce que la valeur de l'option est inférieure à sa valeur intrinsèque. C'est ce que nous vérifions avec les résultats des prix du *put* américain en fonction du nombre de périodes :



Il est connu que lorsque la volatilité augmente, la probabilité d'exercice anticipé d'un *put* américain croît. Nous agrémentons ce résultat avec les calculs effectués avec notre méthode :



## B - Extension à l'univers réel

Le calcul de la probabilité anticipé doit s'effectuer dans l'univers réel. L'extension de la méthode du calcul de cette probabilité, effectué jusqu'alors dans l'univers risque-neutre, à l'univers réel est immédiate.

L'arbre initial des probabilités permet de connaître à une date donnée les intervalles du prix de l'action dans lesquels les exercices anticipés peuvent avoir lieu. Il suffit alors de développer l'arbre des prix de l'action dans l'univers réel, de construire l'arbre initial des probabilités grâce à la connaissance des plages de valeurs dans lesquelles l'exercice anticipé a lieu, puis de calculer les probabilités de manière récursive dans l'univers réel et selon le procédé expliqué précédemment.

En résumé, les deux étapes principales suivantes sont nécessaires :

- Calcul de la frontière d'exercice de l'option dans l'univers risque-neutre
- Reconduite de la méthode avec la diffusion du prix de l'action dans l'univers réel.

Cette méthode est limitée au calcul de la frontière d'exercice et de la probabilité d'exercice anticipé. Le calcul de la duration d'une option est impossible avec ce procédé.

## C - Calcul de la probabilité d'exercice anticipé à une date future donnée

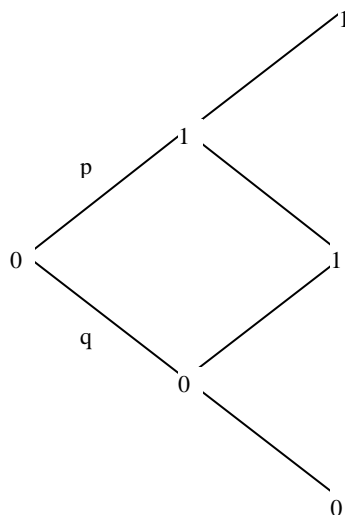
Le calcul de la duration d'une option américaine requiert la connaissance des probabilités d'exercice anticipé à chaque instant précédant la date d'échéance contractuelle. Nous proposons un algorithme numérique à cet effet. Par souci de simplicité, les calculs effectués par la suite sont toujours menés dans l'univers risque-neutre. L'extension à l'univers réel ne pose aucune difficulté.

### *a.Principe de la méthode*

La nouvelle méthode que nous proposons repose sur un parcours de l'arbre de CRR dans le sens naturel d'écoulement du temps et non plus en arrière comme c'était le cas précédemment. La première étape de construction de l'arbre initial des probabilités est reprise. La seconde étape est sensiblement modifiée. Le calcul des probabilités d'exercice anticipé en une date donnée tient compte des éventuels exercices précédents. Afin de différencier ces probabilités par rapport à celles introduites en A, nous mentionnons la correction par la suite. Ce nouveau procédé permet le calcul de la duration.

On suppose qu'il n'y a pas d'exercice à l'instant initial puisque alors la probabilité d'exercice anticipé est égale à 1 et il n'est pas nécessaire de l'étudier. La présentation de la méthode se fait au sein de deux périodes successives.

On suppose que l'arbre initial des probabilités est le suivant :

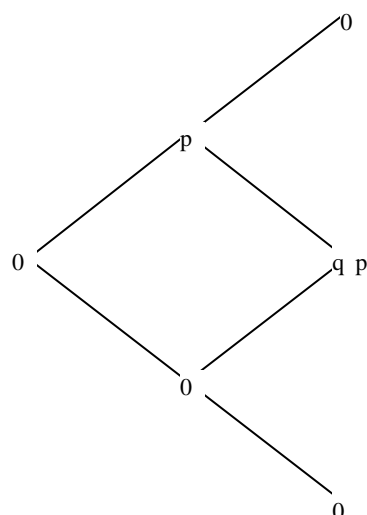


$p$  et  $q$  sont les probabilités de hausse et de baisse du prix de l'actif, dans l'univers dans lequel on souhaite estimer la densité de probabilité d'exercice anticipé.

Les règles de calcul sont les suivantes :

- L'arbre se parcourt en avant ;
- La valeur de probabilité d'exercice anticipé à un **nœud** est égale à :
  - 0 si aucun exercice anticipé n'a lieu à ce **nœud** (c'est -à-dire si la valeur de l'arbre initial vaut 0)
  - à la somme des probabilités des chemins dans lesquels aucun exercice n'a été rencontré si un exercice anticipé a lieu à ce **nœud** (c'est -à-dire si la valeur de l'arbre initial vaut 1)

Donc dans l'exemple à deux périodes cela donne :



On note  $\text{Prob}(n,i)$  les valeurs des probabilités initiales qui valent 0 ou 1,  $\text{ProbaHausse}$  et  $\text{ProbaBaisse}$  les probabilités respectives de hausse et de baisse pour le nœud considéré.

Soient  $P(n,i)$  les probabilités d'atteinte du nœud  $(n,i)$ , et  $\text{ProbFinale}(n,i)$  la probabilité d'atteindre le nœud  $(n,i)$  où un exercice est anticipé à lieu.

$\text{Prob}(.,.)$ ,  $P(.,.)$  et  $\text{ProbFinale}(.,.)$  sont des matrices triangulaires de dimension<sup>195</sup> (Nombre de périodes, Nombre de périodes).

---

<sup>195</sup> Il n'est pas nécessaire de calculer les probabilités jusqu'à la dernière date d'échéance puisqu'à cette date, l'exercice n'est pas anticipé.



L'algorithme détaillé de la seconde étape s'opère en deux temps :

Calcul des probabilités corrigé des exercices anticipés et d'atteinte d'un nœud

**Etape 1 : Calcul des probabilités corrigées d'atteinte des nœuds**

$P(0,0) = 1$

*De UnePeriode=1 à Nombre de Période Faire*

*Si Prob(UnNoeud,1) = 1 Alors*

$P(\text{UnePeriode},1) = 0$

*Sinon*

$P(\text{UnePeriode},1) = P(\text{UnePeriode}-1,1) * \text{ProbaHausse}$

*De UnNoeud = 1 à UnePeriode-1 Faire*

*Si Prob(UnNoeud,UnNoeud) = 1 Alors*

$P(\text{UnePeriode},\text{UnNoeud}) = 0$

*sinon*

$P(\text{UnePeriode},\text{UnNoeud}) = P(\text{UnePeriode}-1,\text{UnNoeud}) * \text{ProbaHausse}$   
 $\text{UnNoeud}-1, \text{UnNoeud}-1) * \text{ProbaBaisse}$

*Si Prob(UnNoeud,UnNoeud) = 1 Alors*

$P(\text{UnePeriode},\text{UnNoeud}) = 0$

*Sinon*

$P(\text{UnePeriode},\text{UnNoeud}) = P(\text{UnePeriode}-1,\text{UnNoeud}-1) * \text{ProbaBaisse}$

**Etape 2 : Calcul des probabilités d'exercice anticipé****On suppose que l'exercice n'a pas lieu à l'instant initial**

Initialiser ProbaFinale à 0

*De UnePeriode=0 à Nombre de Période-2 Faire**De UnNoeud=0 à UnePeriode-1 Faire**Si Prob(UnNoeud, UnePeriode) = 0 Alors**Si Prob(UnNoeud+1, UnePeriode) = 1 Alors**Si ProbFinale(UnNoeud, UnePeriode) > 0 Alors*

$$\text{ProbFinale}(\text{UnNoeud}+1, \text{UnePeriode}) = \text{ProbFinale}(\text{UnNoeud}, \text{UnePeriode}) \\ + (1 - \text{ProbFinale}(\text{UnNoeud}, \text{UnePeriode})) * \text{ProbaHausse}$$
*Sinon*

$$\text{ProbFinale}(\text{UnNoeud}+1, \text{UnePeriode}) = \text{ProbFinale}(\text{UnNoeud}, \text{UnePeriode}) \\ + P(\text{UnNoeud}, \text{UnePeriode}) * \text{ProbaHausse}$$
*Si Prob(UnNoeud+1, UnePeriode+1) = 1 Alors**Si ProbFinale(UnNoeud, UnePeriode) > 0 Alors*

$$\text{ProbFinale}(\text{UnNoeud}+1, \text{UnePeriode}+1) \\ = \text{ProbFinale}(\text{UnNoeud}, \text{UnePeriode}+1) \\ + (1 - \text{ProbFinale}(\text{UnNoeud}, \text{UnePeriode})) * \text{ProbaBaisse}$$
*Sinon*

$$\text{ProbFinale}(\text{UnNoeud}+1, \text{UnePeriode}+1) \\ = \text{ProbFinale}(\text{UnNoeud}, \text{UnePeriode}+1) \\ + P(\text{UnNoeud}, \text{UnePeriode}) * \text{ProbaBaisse}$$

Après la deuxième étape, les probabilités recherchées sont égales à la somme pour une période donnée (UnePeriode) des vecteurs ProbFinale(UnNoeud, .).

*b.Illustration*

Les calculs sont effectués dans l'univers risque-neutre.

En reprenant le même exemple que le précédent, l'arbre intermédiaire des probabilités, corrigées des probabilités d'exercice anticipé, d'atteinte d'un **nod** est :

						0.00
					0.00	
				0.07		0.09
			0.14		0.17	
		0.26		0.26		0.25
	0.51		0.39		0.32	
1.00		0.50		0.37		0.30
	0.49		0.36		0.27	
		0.24		0.18		0.00
			0.00		0.00	
				0.00		0.00
					0.00	
						0.00

L'arbre des probabilités d'atteindre un **nod** où un exercice anticipé a lieu est :

						0.00
					0.00	
				0.00		0.00
			0.00		0.00	
		0.00		0.00		0.00
	0.00		0.00		0.00	
0.00		0.00		0.00		0.00
	0.00		0.00		0.00	
		0.00		0.00		0.13
			0.11		0.09	
				0.00		0.00
					0.00	
						0.00

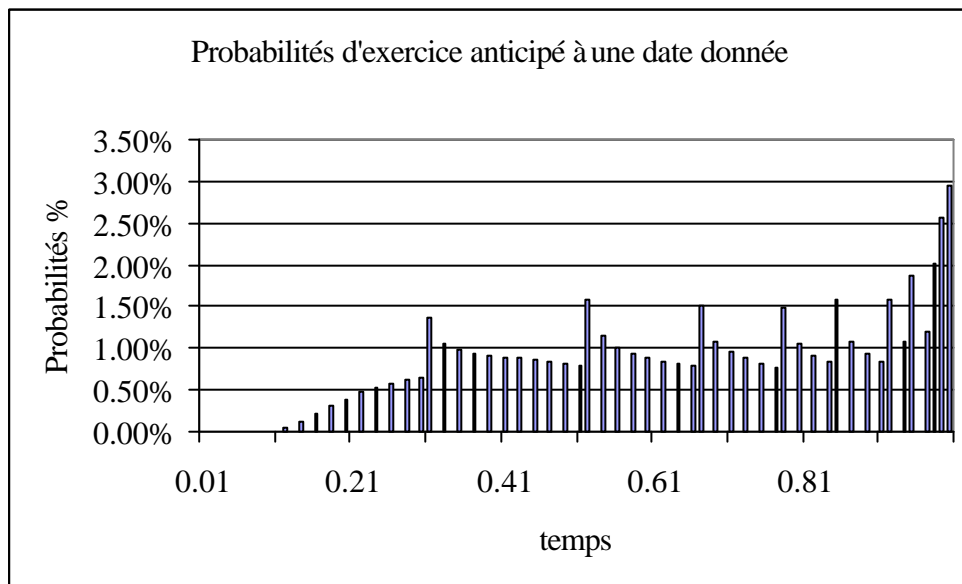
La somme des probabilités pour une même date représente la probabilité d'occurrence d'un exercice anticipé à cette date. La somme totale des probabilités est égale à la probabilité d'exercice anticipé calculée, plus simplement, au préalable.

A partir de ces probabilités, il est facile de calculer la durée d'une option :

$$Duration = Maturité \times \left( 1 - \sum_{i=0}^{N-1} P(i) \right) + \sum_{i=0}^{N-1} (t_i P(i))$$

où  $P(i)$  est égal à la probabilité d'exercice anticipé de l'option à la date  $t_i = i \Delta t$  ( $\Delta t$  étant la durée de la période) et où *Maturité* représente la maturité de l'option.

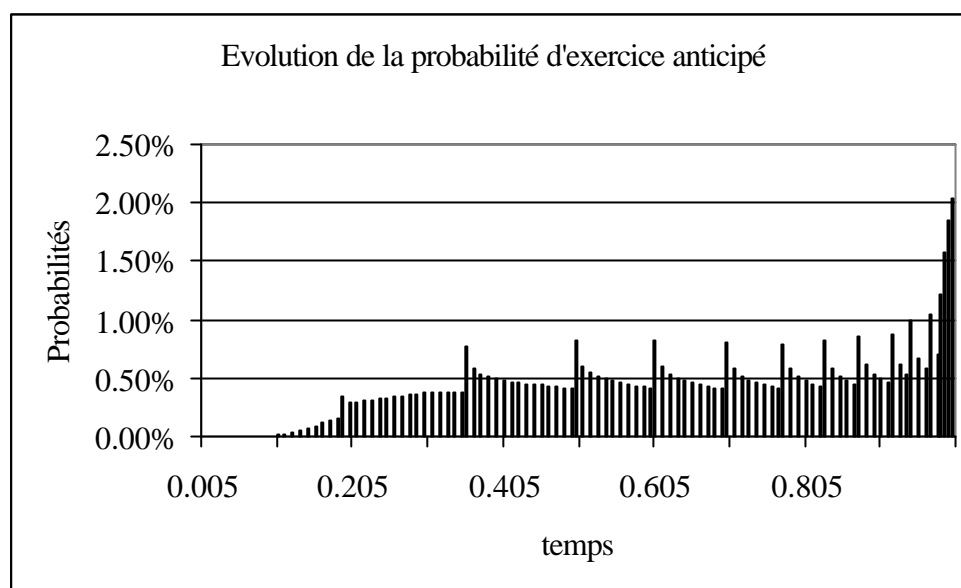
Toujours avec le même exemple, pour 100 périodes, les probabilités d'exercice anticipés à une date donnée sont égales à :



La durée calculée est égale à :

duration  $\approx 0.834$  an.

Avec 200 périodes, nous obtenons un résultat très similaire :



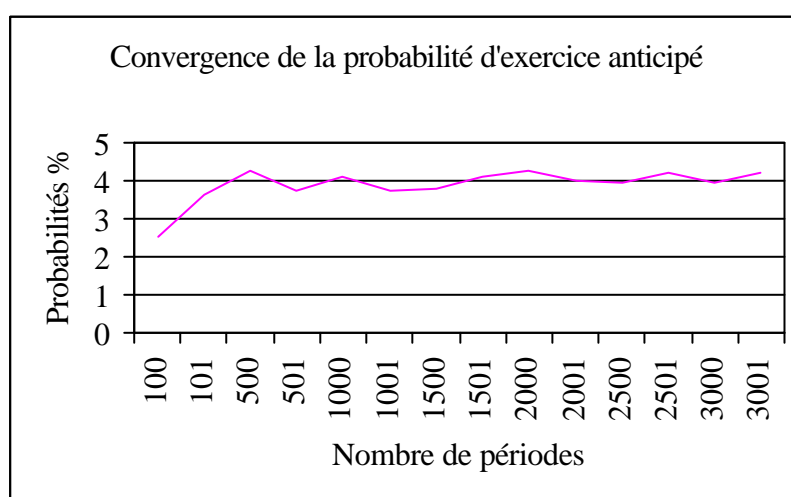
La duration calculée est égale à :

$$\text{duration} \approx 0.834 \text{ an}$$

#### D - Effet du versement des dividendes sur la duration

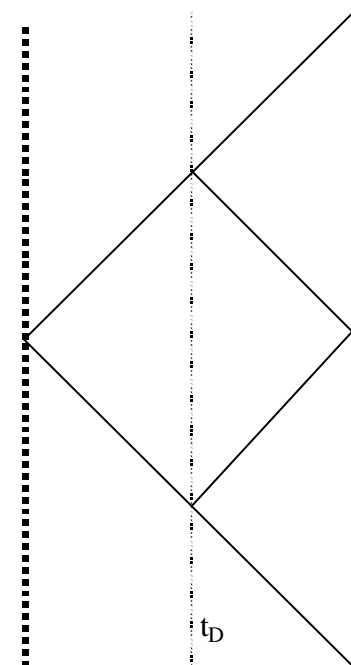
L'exercice prématuré d'un *call* américain ne peut survenir que s'il y a versement d'au moins un dividende. L'algorithme que nous avons présenté est déjà adapté à cette situation. Nous l'appliquons au cas d'un *call* américain sous les hypothèses suivantes :

$$S = 100; K = 100; \sigma = 25 \% ; \tau = 1 \text{ an} ; r = 5 \% ; D = 2 \% \text{ en } t = 0.5 \text{ an}.$$



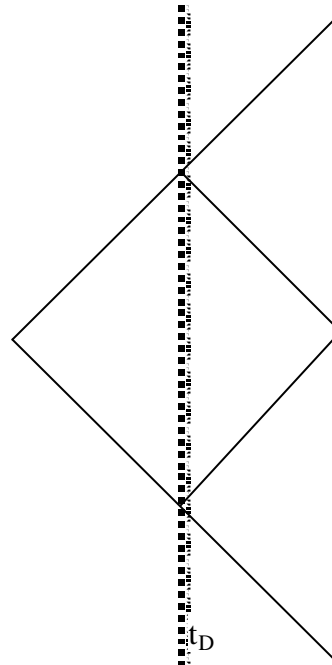
La convergence numérique de la probabilité d'exercice anticipé est un peu lente en raison d'une instabilité numérique dû au découpage du nombre de périodes. Sous les hypothèses de Black et Scholes, pour un *call* américain, l'exercice anticipé ne peut avoir lieu que juste avant le détachement du dividende. Or si une date de l'arbre de calcul coïncide avec

le décrochage du dividende, l'exercice anticipé a lieu une période avant. Au contraire, si une date de l'arbre de calcul précède très légèrement la date de versement du dividende, l'exercice anticipé s'effectue à cette date et l'erreur commise est inférieure ( $t_D$  est la date de versement du dividende) :



date où l'exercice  
anticipé est possible

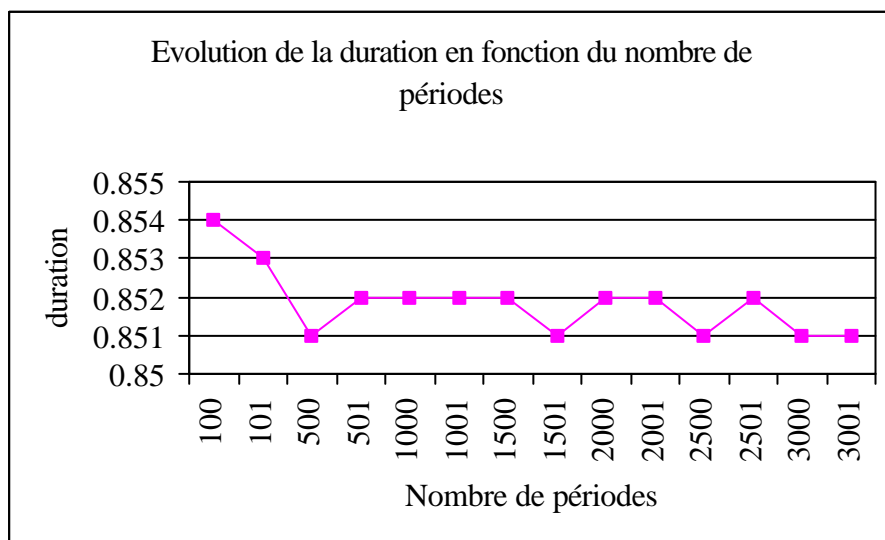
Erreur importante



date où l'exercice  
anticipé est possible

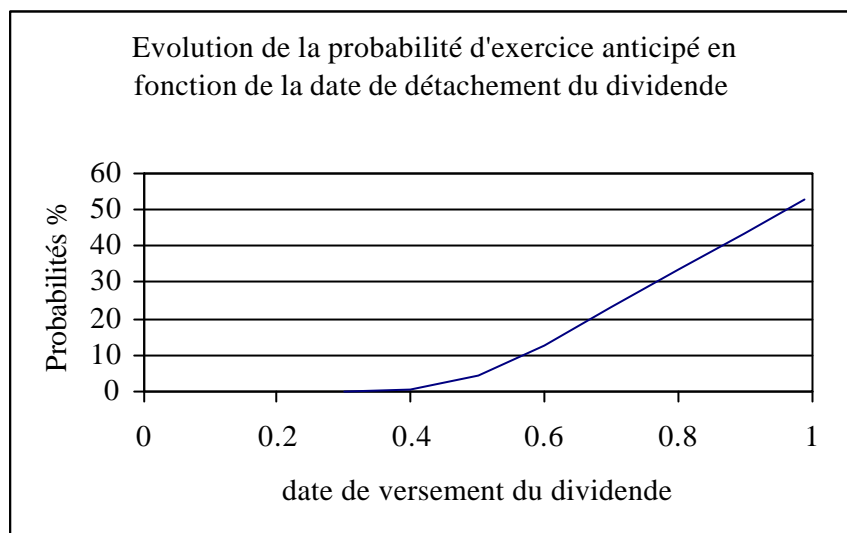
Erreur Faible

Pour autant, l'effet du nombre de périodes sur la duration n'est pas significatif :



La mesure de la duration par notre procédé est numériquement stable.

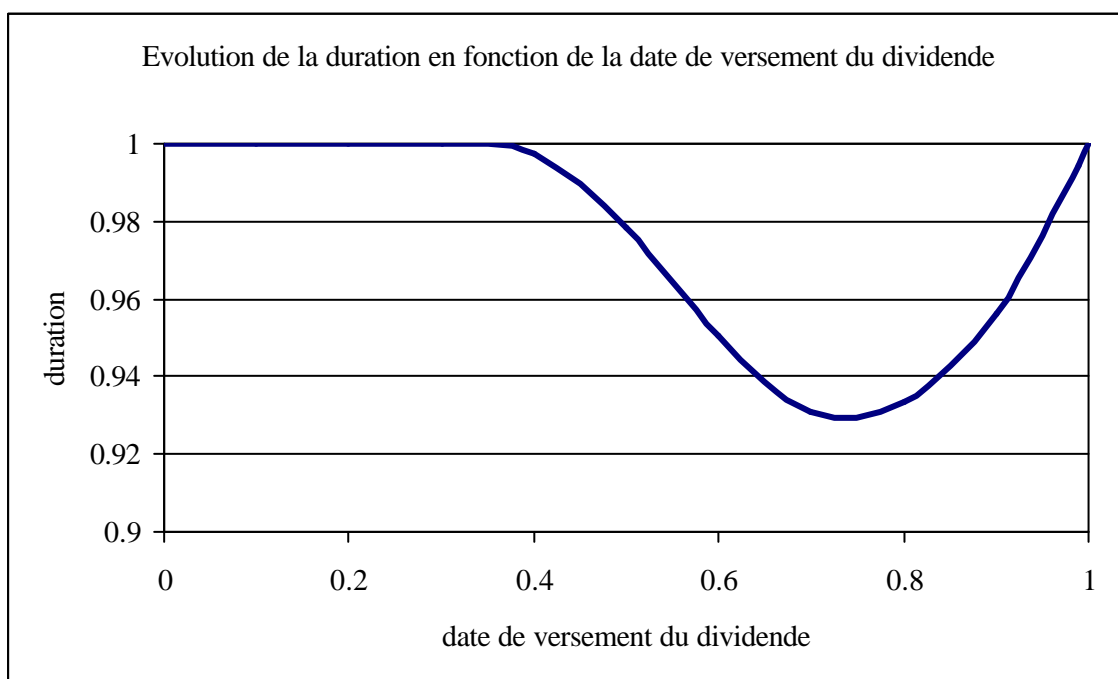
Le graphique suivant révèle l'important effet de la date du versement du dividende sur la probabilité d'exercice anticipé.



(Calculé avec 2000 périodes)

L'exercice anticipé est d'autant plus probable que le détachement du dividende est proche l'échéance.

La duration de l'option en fonction de la date de versement du dividende évolue en creux :



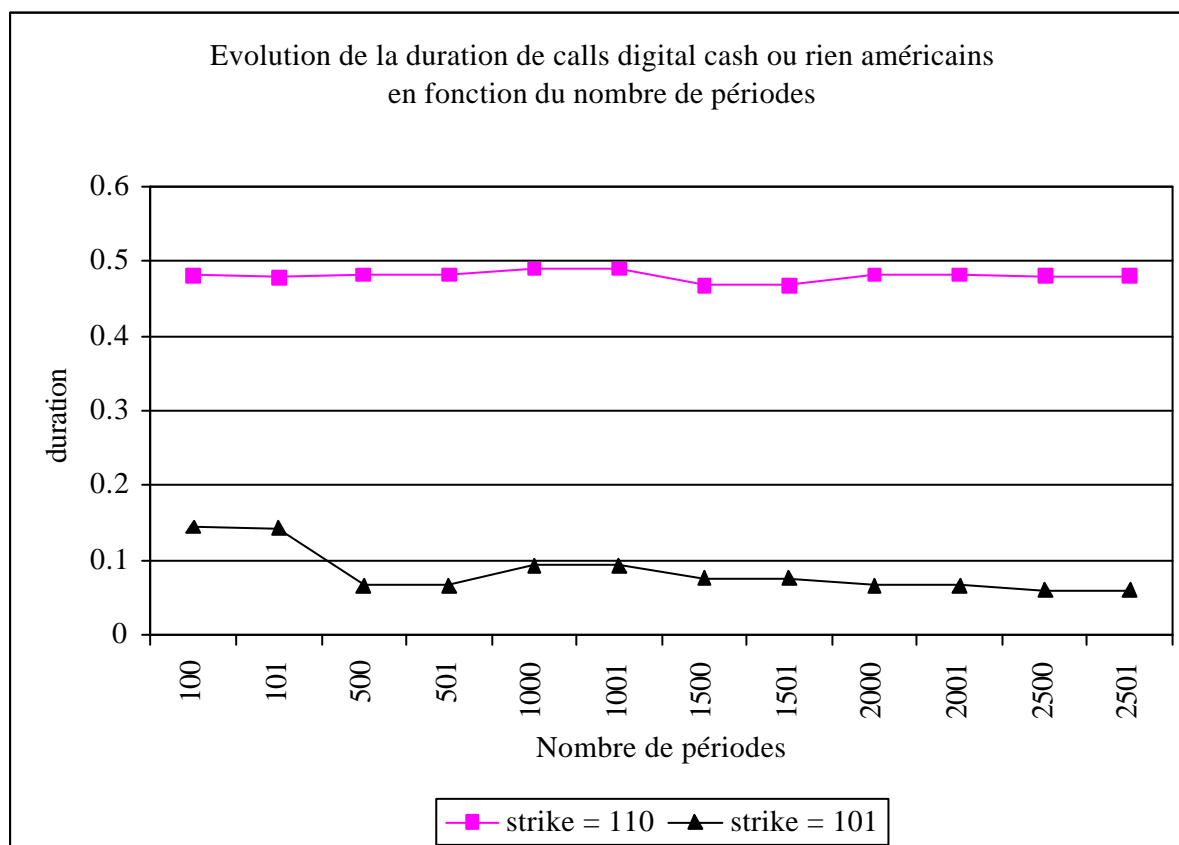
Lorsque le dividende est proche de l'instant initial, il y a peu de chance qu'un exercice anticipé survienne ; la duration est proche de 1. Lorsque le dividende est proche de l'échéance, l'exercice anticipé est fréquent mais il est réalisé à proximité de l'échéance ; la duration est proche de 1. Entre ces deux extrêmes, les exercices anticipés ont lieu plus tôt et avec une probabilité non négligeable ce qui tend à réduire la duration de l'option.

## § 2 - La duration dans le cas des options exotiques

L'application de notre méthode aux calculs des options digitales américaines est directe. Même sous des hypothèses d'évaluation générales, en adaptant légèrement notre algorithme, la duration de certaines options exotiques, telles que les options à barrière, est facilement calculée.

### A - Calcul de la duration des options digitales

La méthode numérique expliquée dans le cas des options américaines est directement applicable aux options digitales. La convergence de la méthode est là encore vérifiée :

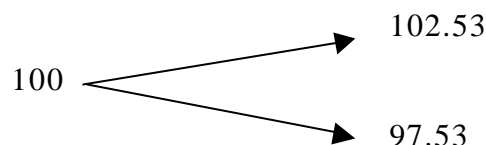


Données initiales :  $S = 100$  ;  $K = 110$  ou  $101$  ;  $\sigma = 25\%$  ;  $\tau = 1$  an ;  $r = 5\%$  ;  $\text{soulte} : 100$ .

Lorsque le prix d'exercice est proche du *spot*, quelques problèmes numériques dus à l'utilisation du modèle de CRR apparaissent. Dans l'exemple où  $K = 101$ , la duration calculée



avec une centaine de périodes est peu représentative de la duration exacte. En fait, dès que le prix de l'action atteint ou dépasse le prix d'exercice, l'exercice anticipé de l'option a lieu. Or la mise en œuvre du modèle binomial avec 100 périodes conduit aux premières valeurs du prix *spot* suivantes :



A l'instar de ce que nous évoquions en première partie de cette thèse dans le cadre de la probabilité d'atteinte des barrières par les prix de l'actif dans l'arbre, la probabilité d'exercice anticipé est biaisée. La valeur 102.53 étant supérieure au prix d'exercice 101, la probabilité risque-neutre sous-évalue la probabilité réelle d'exercice anticipé. En augmentant le nombre de période, ce problème se dissipe et le calcul de la duration tend vers sa limite. Les résultats peuvent être stabilisés en adaptant légèrement un arbre trinomial de sorte que l'un des niveaux de prix de l'action coïncide avec le seuil d'exercice.

La duration des options digitales actif ou rien est calculée tout aussi simplement. L'introduction d'une barrière nécessite une légère adaptation de l'algorithme. Celle-ci est présentée ci-dessous dans le cas des options à barrière.

## B - Calcul de la duration des options à barrière

La durée de vie des options à barrière est incertaine. Leur emploi dans l'élaboration d'une couverture de portefeuille pour un horizon fixé nécessite de connaître la distribution mathématique de leur durée de vie moyenne.

Reiner et Rubinstein, Dana et Jeanblanc-Picqué, et plus récemment Douady se sont penchés sur le difficile calcul de la durée de vie moyenne des options à barrière. Ils ont obtenus de nombreuses formules analytiques pour la probabilité du franchissement d'une ou plusieurs barrières par le prix du sous-jacent et en ont déduit la distribution mathématique de la durée de vie des options à barrière.

Dans un premier temps, une partie des résultats de ces auteurs est présentée. Dans un second temps, notre méthode numérique du calcul de la duration est adaptée aux options à barrière désactivante. Notre principe est plus général que les formules analytiques et peut être étendu sans aucune difficulté aux options à barrière américaine avec ou sans *rebate*, à une structure stochastique des taux et de la volatilité, à un ou plusieurs versements discret de dividende, etc.

*a. Etude analytique de la durée de vie des options à barrière*

Le calcul analytique de la durée de vie des options à barrière demande la connaissance préalable d'un ensemble de probabilités présentées ci-après.

## 1 - La probabilité de transition

Soit  $p(S_t; S_0)$  la densité de probabilité de transition du cours  $S_t$  de l'actif à l'instant  $t$  conditionnellement au prix de l'actif à l'instant  $t_0$ ,  $S_0$ .

La probabilité que le cours  $S$  à l'instant  $t$  appartienne à l'intervalle  $[a; b]$  conditionnellement à  $S_0$ ,  $P(S_t \in [a; b] | S_0)$ , est défini par :

$$P(S_t \in [a; b] | S_0) = \int_a^b p(S_t | S_0) dS_t$$

Sous l'hypothèse classique selon laquelle, dans l'univers risque-neutre, le cours de l'actif suit le mouvement brownien géométrique suivant :

$$dS = rSdt + \sigma S dZ$$

La probabilité  $P(S_t \in [K; +\infty[ | S_0)$  n'est autre que le terme très connu  $N(d_2)$  de la formule de Black et Scholes, c'est-à-dire :

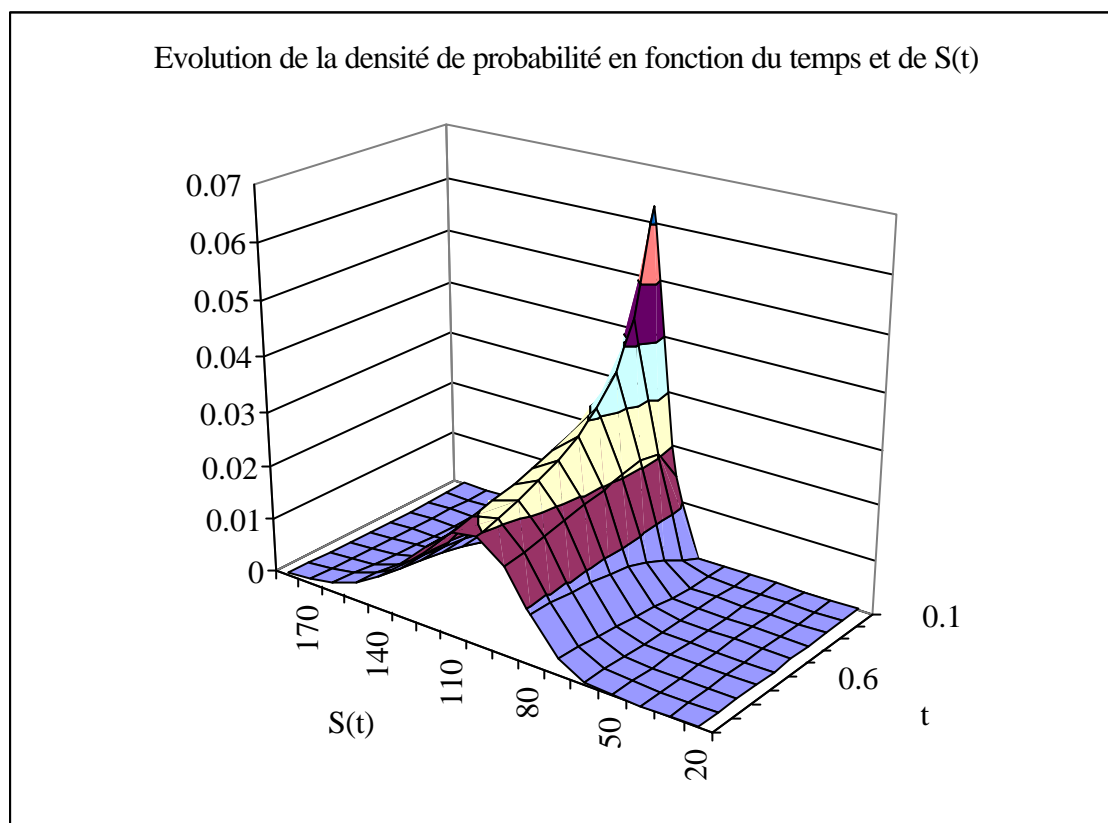
$$P(S_t \in [K; +\infty[ | S_0) = N(d_2) = N\left(\frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}{\sigma\sqrt{t}}\right)$$

La probabilité  $P(S_t \in [a; b] | S_0)$  s'obtient alors très facilement :

$$P(S_t \in [a; b] | S_0) = N\left(\frac{\ln\left(\frac{S}{a}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}{\sigma\sqrt{t}}\right) - N\left(\frac{\ln\left(\frac{S}{b}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}{\sigma\sqrt{t}}\right)$$

En dérivant la fonction et en faisant tendre les bornes  $a$  et  $b$  vers  $S_t$ , on parvient à l'expression de la densité recherchée :

$$p(S_t | S_0) = \frac{1}{S_0 \sigma \sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{\left(\ln\left(\frac{S_0}{S_t}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right)^2}{2\sigma^2 t}}$$



La probabilité que nous venons de définir ne considère qu'une seule et unique date. Elle permet de connaître à **un instant donné** la probabilité d'appartenance du prix dans un intervalle.

Elle sert notamment à calculer les chances, **après passage dans l'univers réel**, de finir dans la monnaie à l'échéance ou encore au calcul des options corridor.

## 2 - Etude de la durée de vie des options à barrière

L'espérance du temps d'arrêt correspondant au franchissement d'une barrière par le prix *spot* donne la duration des options à barrière désactivante et une valeur minimale de la duration attendue des options à barrière activante. L'étude de la loi du maximum et du minimum d'un mouvement brownien avec tendance permettent le calcul de ces durations.

### 2.1 - Loi du maximum et du minimum d'un brownien avec tendance

Nous reprenons les résultats présentés par Dana et Jeanblanc-Picqué<sup>196</sup>.

Soit  $X_t$ ,  $M_t^X$  et  $m_t^X$  trois processus définis par :

<sup>196</sup> DANA R-A et JEANBLANC-PICQUE M., "Marchés financiers en Temps Continu - Valorisation et équilibre", *Ed Economica*, 2è édition, 1998. Certains des calculs sont très détaillés par RICH D.R., "The Mathematical Foundations of Barriers Options-Pricing Theory", *Advances in Futures and Options Research*, vol 7, 1994.

- $X_t = \mu t + \sigma B_t$   
avec  $\sigma > 0$  (en fait si  $\sigma$  est inférieur à 0, il suffit de considérer le brownien  $-B_t$ )
- $M_t^X = \sup(X_s ; s \leq t)$
- $m_t^X = \inf(X_s ; s \leq t)$

Alors,

- pour  $y \geq 0$  et  $y \geq x$  :

$$P(X_t \leq x, M_t^X \geq y) = e^{\frac{2my}{s^2}} P(X_t \geq 2y - x + 2mt)$$

$$P(X_t \leq x, M_t^X \leq y) = N\left(\frac{x - mt}{s\sqrt{t}}\right) - e^{\frac{2my}{s^2}} N\left(\frac{x - 2y - mt}{s\sqrt{t}}\right)$$

- pour  $y \leq 0, y \leq x$  :

$$P(X_t \geq x, m_t^X \geq y) = N\left(\frac{-x + mt}{s\sqrt{t}}\right) - e^{\frac{2my}{s^2}} N\left(\frac{-x + 2y + mt}{s\sqrt{t}}\right)$$

D'où, l'on tire les lois du maximum et du minimum :

$$\begin{aligned} \text{avec } y \geq 0 : P(M_t^X \leq y) &= N\left(\frac{y - mt}{s\sqrt{t}}\right) - e^{\frac{2my}{s^2}} N\left(\frac{-y - mt}{s\sqrt{t}}\right) \\ \text{avec } y \leq 0 : P(m_t^X \geq y) &= N\left(\frac{-y + mt}{s\sqrt{t}}\right) - e^{\frac{2my}{s^2}} N\left(\frac{y + mt}{s\sqrt{t}}\right) \end{aligned}$$

## 2.2 - Option à barrière désactivante

Dans le cas des options à barrière désactivante, la probabilité du franchissement de la barrière est une mesure importante. Elle conditionne l'espérance de vie de l'option.

Soit :

$B_H$  et  $B_B$  les barrières haute et basse ;  $B_H > S_0$  ;  $B_B > S_0$

$$b = \ln(B_H/S_0)$$

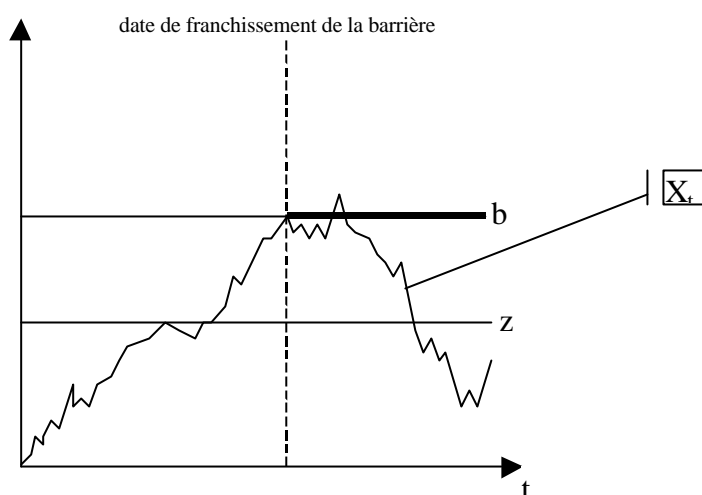
$$\mu = \ln(r'/d') - 0.5 \sigma^2$$

$$X_t = \ln(S_t/S_0) ; X_0 = 0$$

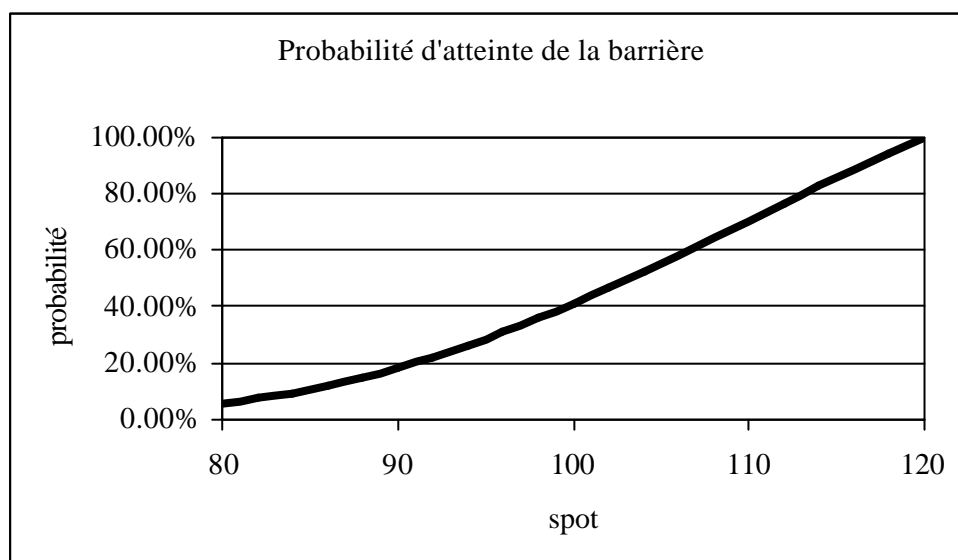
$z$  un réel inférieur à  $b$

où  $r'$  est égal à  $1 + r$ ,  $d' = 1 + d$  avec  $d$  le taux de dividende.

Si le processus  $X_t$  franchit la valeur  $b$ , alors la barrière  $B_H$  est franchie :



La probabilité du franchissement de la barrière évolue de la façon suivante<sup>197</sup> :



Données initiales :  $B_H = 120$  ;  $r = 5\%$  ;  $\tau = 1$  an ;  $\sigma = 20\%$

Cette probabilité est croissante avec le *spot*.

### 2.3 - Option à barrière activante

Dans le cas des options à barrière activante, la probabilité recherchée est celle du franchissement de la barrière par le prix de l'actif sous la condition que ce dernier termine à l'échéance de l'option en-dessous<sup>198</sup> de la valeur de la barrière.

#### 2.3.1 La probabilité d'atteinte d'une barrière par le prix de l'action et de finir au-dessous

<sup>197</sup> Nous avons adapté le graphique en fonction du prix *spot* et non du rendement.

<sup>198</sup> L'autre probabilité nécessaire au calcul est celle de franchir la barrière et de terminer au dessus. Elle est égale à la probabilité de finir au dessus de la barrière dont le calcul a été déjà établi.

Pour obtenir cette probabilité, il suffit d'appliquer la formule précédente,

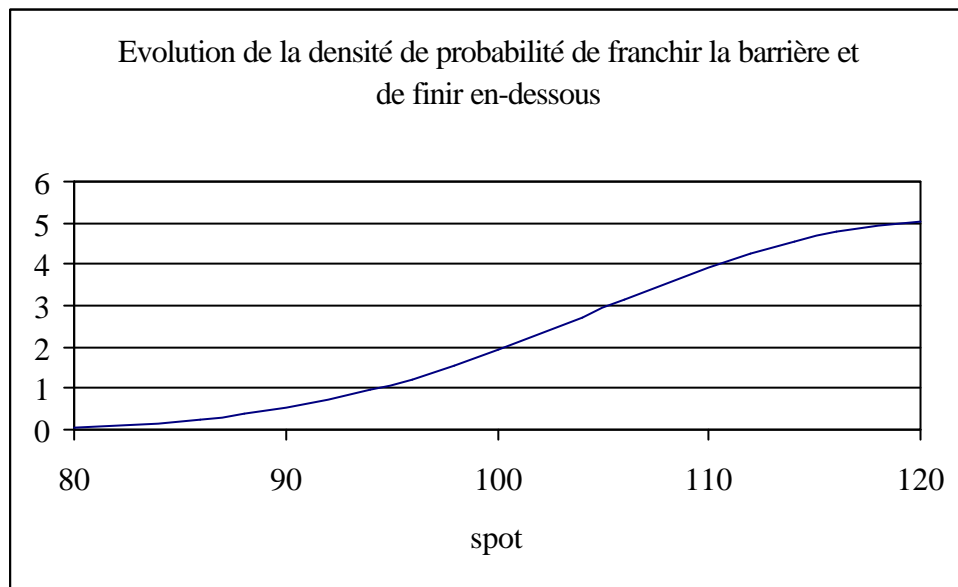
$$P\left(X_T < z; \sup_{t \in [0;T]} X_t > b\right) = \exp\left(\frac{2mb}{s^2}\right) N\left(\frac{z - 2b - mT}{s\sqrt{T}}\right)$$

La densité  $g_z(z)$  est égale à :

$$g_z(z) = \exp\left(\frac{2mb}{s^2}\right) \frac{1}{s\sqrt{T}} n\left(\frac{z - 2b - mT}{s\sqrt{T}}\right)$$

où  $n$  est la densité de la loi  $N(0,1)$  et  $\mu$  la dérive du processus de  $S$ .

En repoussant la valeur de  $z$  vers  $b$ , on obtient la probabilité de franchir la barrière et de finir en-deçà<sup>199</sup> :



Données initiales :  $B_H = 120$  ;  $r = 5\%$  ;  $\tau = 1$  an ;  $\sigma = 20\%$ .

La densité est une fonction croissante. Plus le *spot* se rapproche de la barrière, plus la probabilité de franchir la barrière augmente. Par contre, la pente est décroissante car plus on est proche de la barrière plus la probabilité de terminer en-dessous diminue.

### 2.3.2 Etude du temps de passage

Soit  $T_A$  le temps d'arrêt définissant le premier franchissement de la barrière haute  $B_H$  par le cours de l'action surgissant avant  $T$  :

$$T_A = \inf \{t \in [0;T]; S_t = B_H, S_T < B_H\}$$

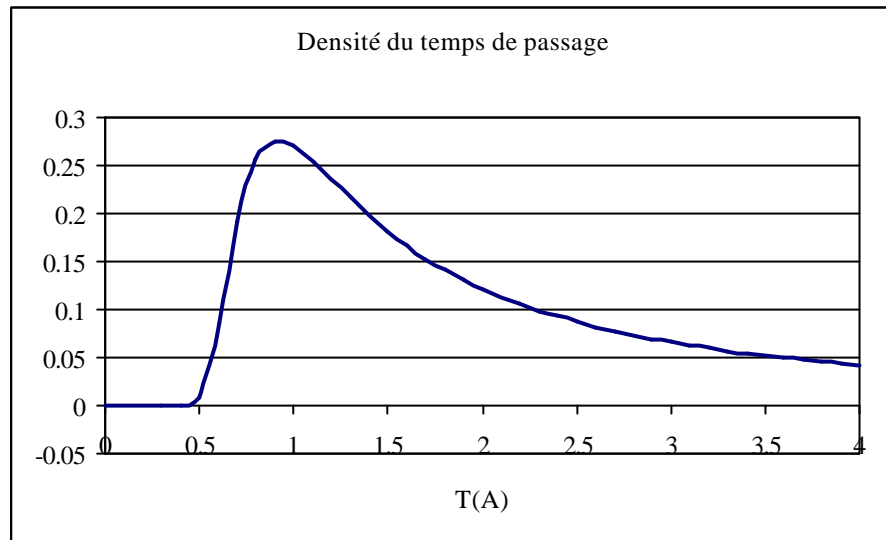
La densité  $h(T_A)$  du temps de passage s'écrit :

<sup>199</sup> Afin de mieux représenter le comportement de la probabilité, l'axe des abscisses est tracé en fonction du *spot* et non de  $z$ .

$$h(T_A) = \frac{\ln\left(\frac{B_H}{S_0}\right)}{S\sqrt{T_A^3}} \times n(x_1 - S\sqrt{T_A})$$

$$\text{où, } x_1 = \frac{\ln \frac{S}{B_H} + (m + S^2)T}{S\sqrt{T}}.$$

L'allure de cette densité est la suivante :



Données initiales :  $S = 100$  ;  $H = 120$  ;  $r = 5\%$  ;  $\sigma = 20\%$ .  $T(A) = T_A$ .

Avec les conditions retenues, la valeur de la densité atteint son maximum un peu avant 1 an (il ne s'agit pas de l'espérance du temps d'arrêt). Après ce pic, la valeur de la densité est d'autant plus faible que  $T_A$  augmente. Cette décroissance traduit la diminution de la probabilité du prix de l'action de revenir au-dessous de la barrière.

#### *b. Etude numérique de la durée de vie des options à barrière*

A présent, nous allons comparer certains des résultats analytiques précédents avec notre méthode de calcul de la durée. Notre principe de calcul de la durée est plus général que les formules analytiques. La connexion entre ces deux méthodes ne peut donc être établie que sous les hypothèses restrictives des formules analytiques, c'est-à-dire en présence d'une option européenne dont le sous-jacent ne verse pas de dividende, avec une structure des taux plate et une volatilité du rendement constante.

Au lieu de calculer des probabilités d'exercice anticipé, il faut calculer les probabilités d'atteinte d'une barrière supposée désactivante. La première étape de l'algorithme est maintenue, seuls les appellations changent. L'arbre des probabilités initial est calculé en attribuant la valeur 1 aux nœuds pour lesquels la barrière est franchie et une valeur nulle à

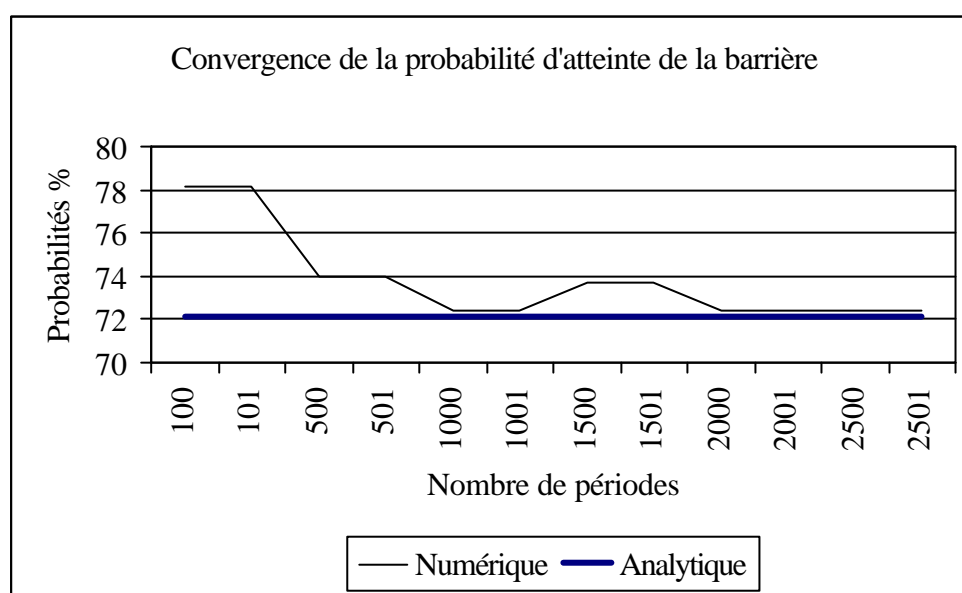
tous les autres. Puis l'algorithme est repris en modifiant les conditions portant sur le calcul des probabilités d'atteinte d'un ~~no~~d sans qu'un exercice anticipé soit intervenu. Les conditions sont relatives au franchissement de la barrière.

Avec les données initiales suivantes :

*Call up & out* ;  $S = 100$  ;  $K = 100$  ;  $B_H = 110$  ;  $\sigma = 25\%$  ;  $\tau = 1$  an ;  $r = 5\%$ ,

la probabilité risque-neutre d'atteinte de la barrière calculée de façon analytique est égale à : 72.16%.

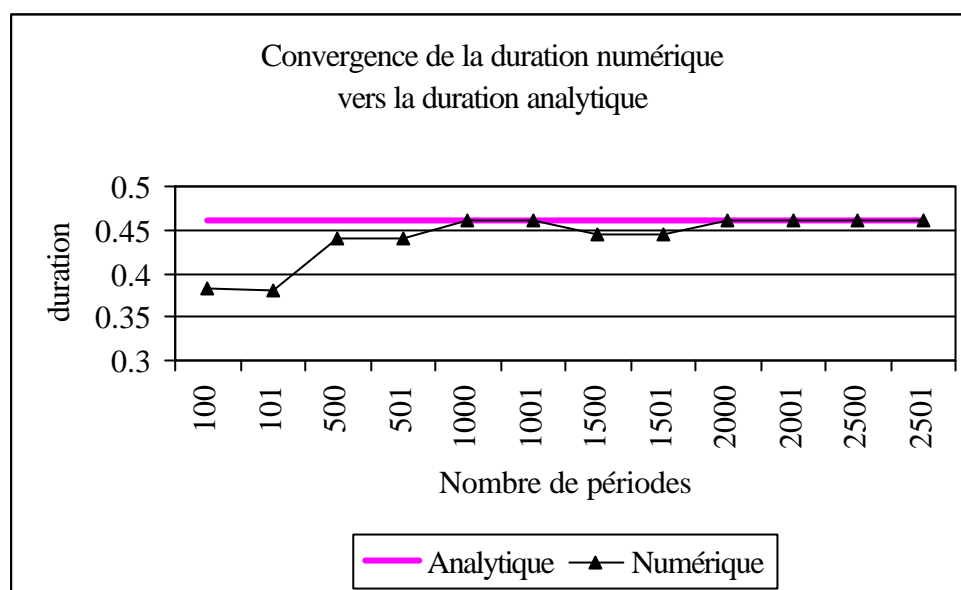
Le graphique suivant montre qu'avec la légère adaptation apportée, notre méthode permet de calculer cette probabilité et la durée de l'option :



A part les erreurs dues aux biais de l'estimation des probabilités d'atteinte de la barrière et inhérentes à l'utilisation du modèle de CRR au lieu d'un autre plus adapté, la convergence de la probabilité d'atteinte de la barrière est vérifiée.

Il en est de même de la durée :





La méthode numérique que nous avons élaborée permet de calculer la duration des options exotiques sans aucune restriction sur les hypothèses si ce ne sont celles du modèle par arbre employé. Le calcul de la duration est possible même sous les conjectures de dividendes versés à une date fixé, de taux d'intérêt et d'une volatilité non constants. L'extension à l'hypothèse de plusieurs sous-jacents ne pose aucune difficulté conceptuelle, seules les capacités de l'outil informatique sont limitatives.

## SECTION 2. La gestion des delta non usuels

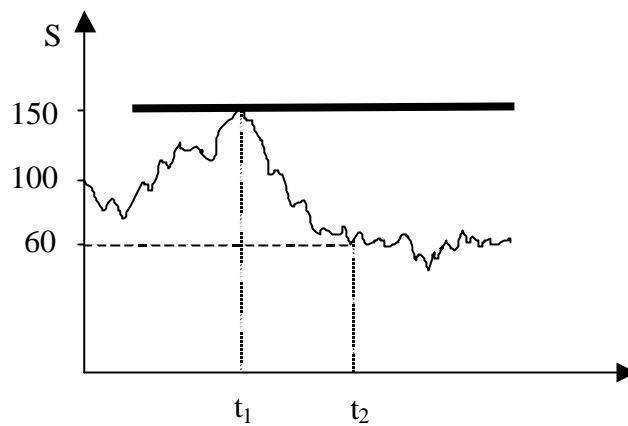
Lorsque le prix de l'actif sous-jacent est proche du prix d'exercice, la gestion dynamique des options vanilles dont l'échéance est proche est incertaine. Il suffit d'une très faible variation du sous-jacent pour que la couverture ne soit plus adaptée.

Pour les options exotiques, deux complications supplémentaires peuvent être rencontrées. Tout d'abord, sous certaines conditions le delta des options *lookback* est "figé". Le delta est nul malgré l'évolution du temps et du prix de l'actif sous-jacent. Nous appelons ce type de delta un palier. Ensuite, dans le cas des options à barrière, le delta présente une discontinuité à l'origine d'un levier important pouvant causer des pertes conséquentes.

### § 1 - Les delta à paliers

Le delta des options *lookback* présente la singularité de pouvoir être presque nul bien que la valeur intrinsèque de l'option soit strictement positive.

Prenons pour exemple le cours simulé suivant :



En  $t_1$ , un maximum est atteint. Supposons que l'option soit un *call price lookback*. Le *payoff* à l'échéance est égal à

$$\text{Payoff} = \text{Max} \{ \text{Max} ( S_t ; t \in [t_0 ; T] ) - K ; 0 \}$$

Dans le cas envisagé, le *payoff* à l'échéance est égal à :

$$\text{Payoff} = \text{Max} \{ S_{t_1} - K ; 0 \}$$

En  $t_2$  et au-delà, la probabilité d'atteindre un nouveau maximum est très faible. Le delta du prix de l'option au voisinage du prix *spot* 60 € est quasiment nul.

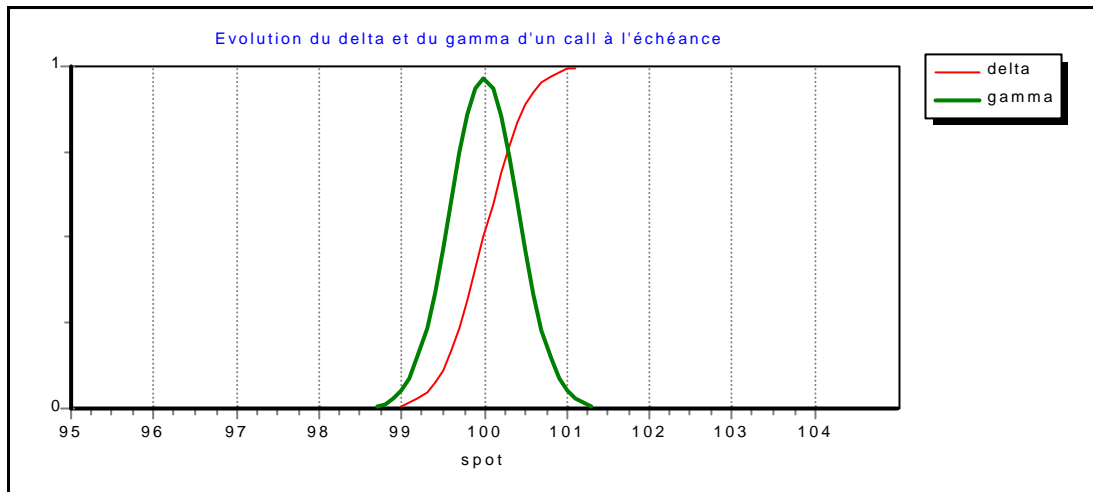
La valeur de l'option est égal au prix de l'emprunt de nominal  $S_{t_1} - K$  actualisé.

La gestion de cette option est fondamentalement modifiée. Ses principales sensibilités sont celles d'une obligation zéro-coupon.

## § 2 - Les delta non continus

### A - Les problèmes rencontrés à l'échéance

A l'échéance, les options européennes proche de la monnaie sont extrêmement difficiles à gérer en raison d'un delta quasi binaire dû à un gamma très élevé :



Données initiales :  $K = 100$  ;  $r = 5\%$  ;  $\tau = 1/10$  de jour ;  $\sigma = 20\%$ .

Le gamma d'une option vanille s'écrit :

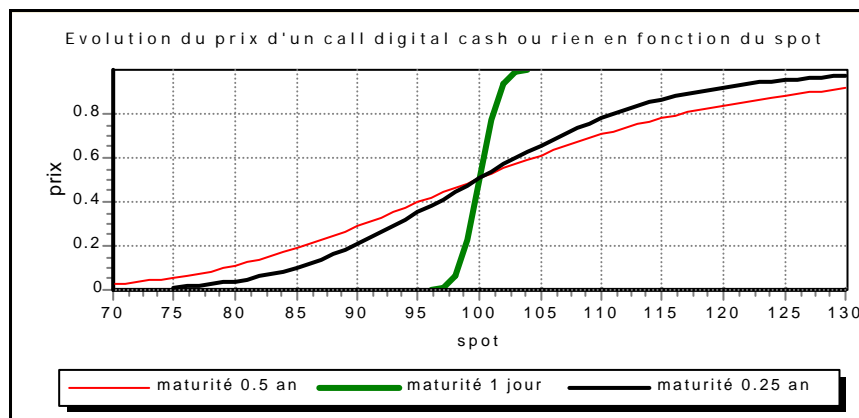
$$g = \frac{n(d_1)}{S\sigma\sqrt{t}} \text{ avec } d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

Il est facile de montrer que  $\lim_{S=K, t \rightarrow 0} g = +\infty$ . A l'échéance, le delta est discontinu : il vaut 0 ou 1.

Ce problème de discontinuité du delta à l'échéance n'est que rarement rencontrés pour les options asiatiques et les options *lookback*. Pour les options *lookback* le delta évolue continûment malgré la particularité du palier. Tandis que la prise en compte d'une moyenne et non pas d'une seule et unique valeur a tendance à diminuer le gamma des options asiatiques ; les variations du delta sont faibles.

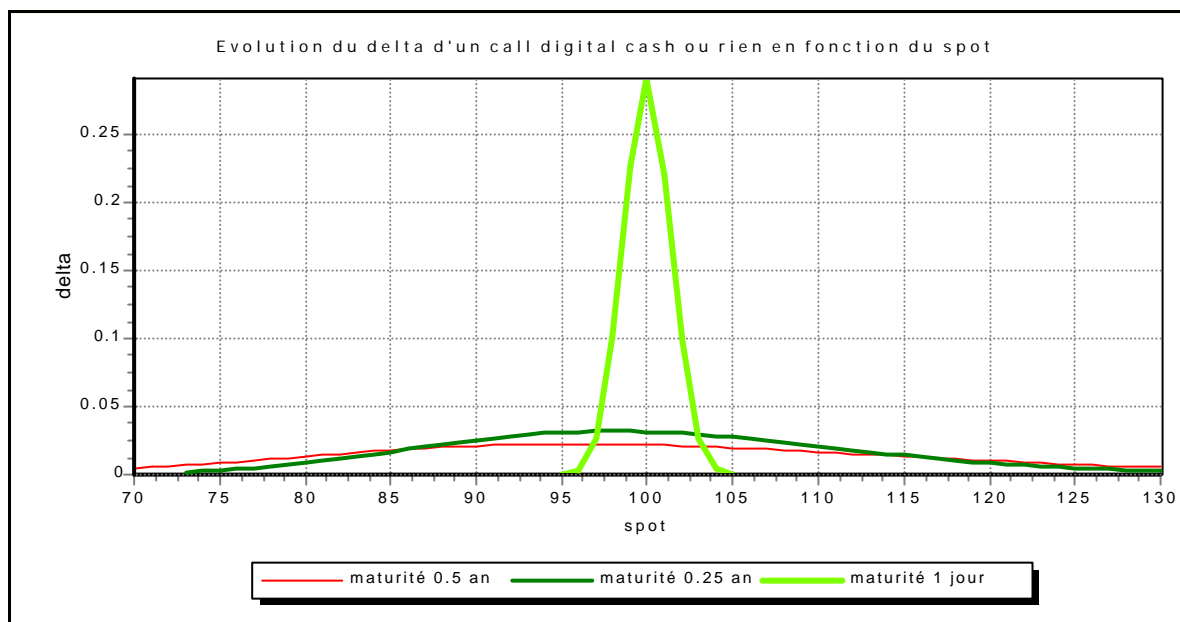
## B - Les problèmes de delta liés aux options binaires

Le *payoff* des options binaires est discontinu. Cette irrégularité crée une forte variabilité du prix de l'option en fonction du *spot* qui s'accroît lorsque l'échéance approche :

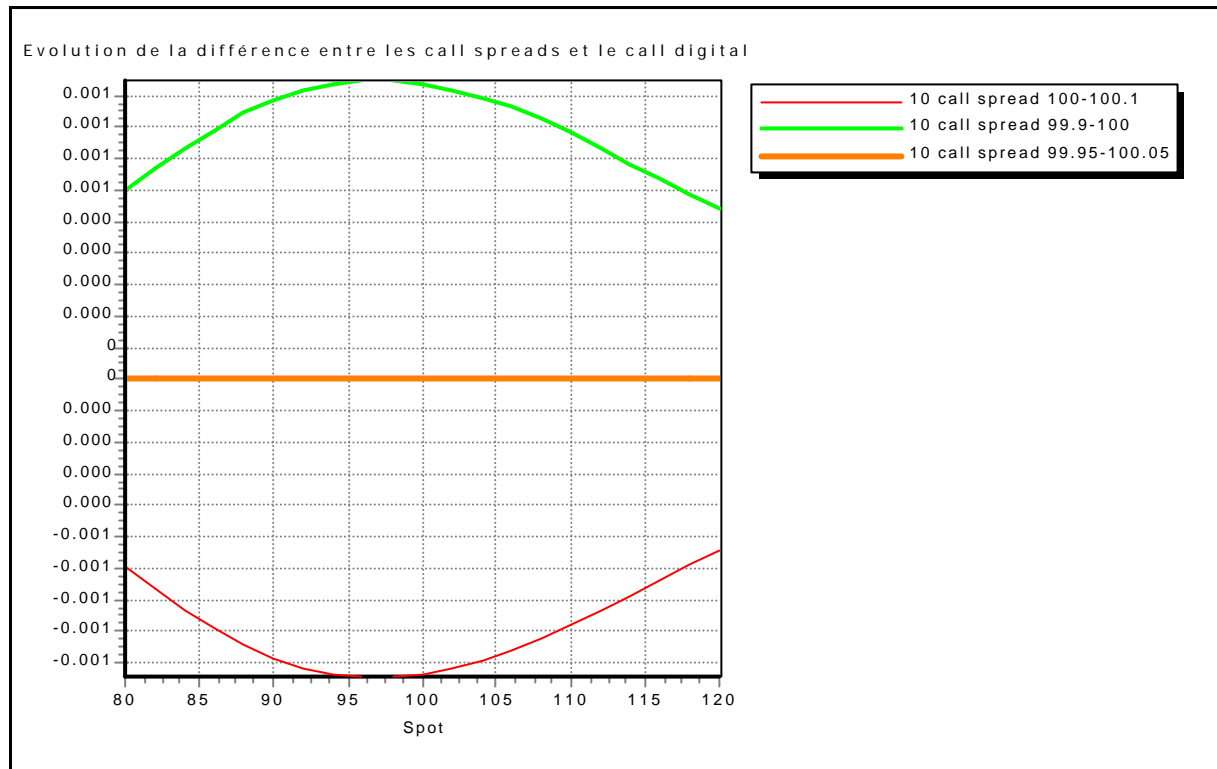


Le graphique révèle que l'évolution du prix d'une option digitale cash ou rien, avec une soulte égale à 1 €, ressemble à celui du delta d'un *call* vanille.

A l'échéance, le delta d'un *call* cash ou rien proche de la monnaie est très instable et a l'aspect du gamma d'un *call* vanille :



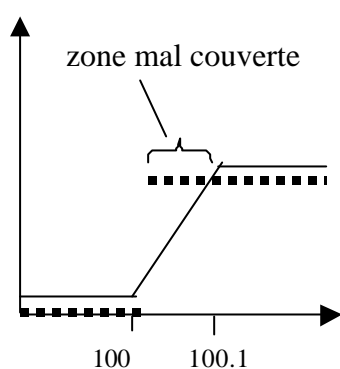
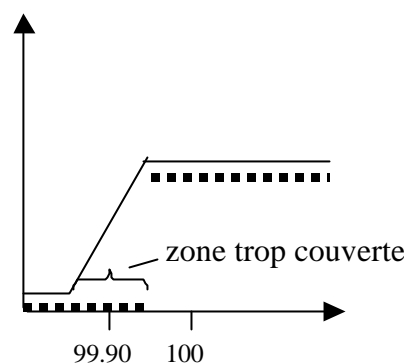
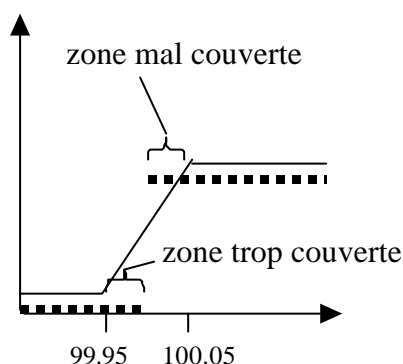
Dans le chapitre 4, nous avons montré que le *payoff* d'une option digitale pouvait être reproduit avec une somme infini de *calls spreads*. Par conséquent, en constituant un portefeuille d'option vanille à partir de *calls spreads*, le profil du prix de la somme de ces *calls spreads* peut être très proche de celui d'une option binaire cash ou rien :



Données initiales :  $K = 100$ ;  $S_{\text{oulte}} = 1$ ;  $r = 5\%$ ;  $\sigma = 20\%$ ;  $\tau = 1$  an.

Dans notre exemple, l'option binaire a été comparée avec 10 *calls spreads* avec trois couples de prix d'exercice différents : (99.9 ; 100), (100 ; 100.1) et (99.95 ; 100.05). Ces trois cas donnent des résultats de couverture correcte lorsque l'échéance considérée est éloignée (1 an dans l'exemple). Mais ils présentent une couverture à l'échéance très différentes.

La première stratégie constituée des *calls spreads* (100 ; 100.1) sous-estime le prix de l'option binaire. La deuxième stratégie basée à partir de *calls spreads* (99.9 ; 100) surestime la valeur de l'option digitale. Enfin, la troisième stratégie réalisée avec dix *calls spreads* (99.95 ; 100.05) engendre la plus petite erreur. Le graphique des payoffs montre que cette hiérarchie des prix correspond à une couverture plus ou moins importante :

1<sup>er</sup> cas2<sup>e</sup> cas3<sup>e</sup> cas

———— est le payoff des calls spreads

■■■■■■■■■■ est le payoff de l'option binaire

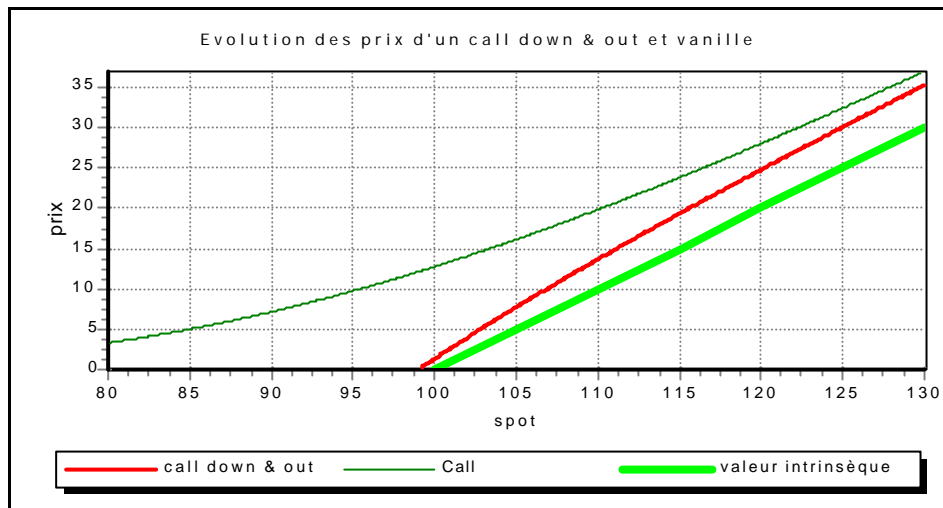
### C - Les problèmes liés aux options à barrière

Les options à barrière simple se distinguent soit par la position de la barrière par rapport au prix de l'action (barrière *up* ou *down*) soit par rapport au type de l'option. En général, l'acheteur d'un *call* (resp. *put*) anticipe une hausse (resp. baisse) du cours du sous-jacent. Si la barrière est située à l'opposé de cette anticipation, elle est qualifiée de régulière (*regular*). Dans le cas inverse où la prévision de l'acheteur est dirigée vers la barrière, celle-ci est dite contraire (*reversal*).

L'effet de la discontinuité du delta des options à barrière n'a pas la moindre importance selon le type régulier ou contraire de la barrière. L'étude est menée dans les deux cas.

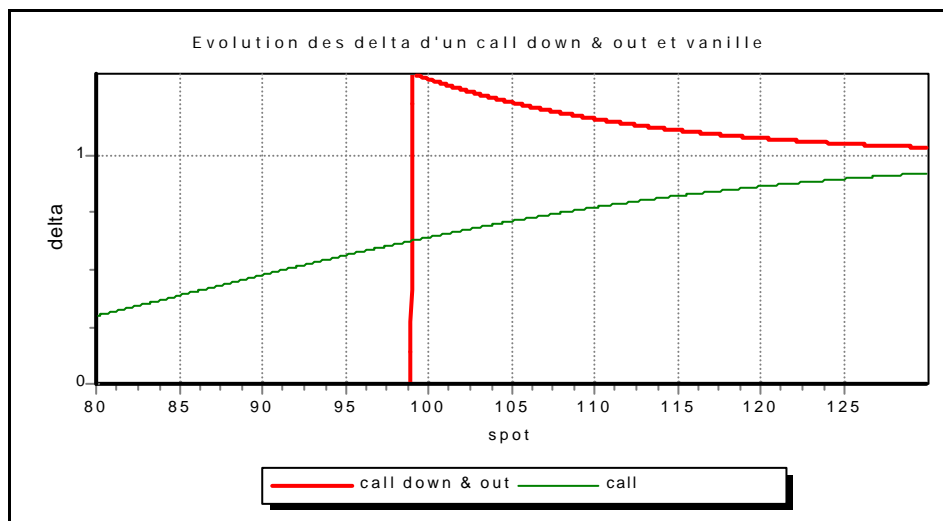
### a. Le cas des options à barrière régulière

Les évolutions du prix d'un *call* vanille et d'un *call down & out* en fonction du *spot* n'ont pas la même concavité. La courbe de prix d'un *call* vanille est convexe, celle d'un *call down & out* est concave :



Données initiales :  $K = 100$ ;  $B = 99$  ;  $r = 5\%$  ;  $\sigma = 25\%$  ;  $\tau = 1$  an.

La probabilité d'atteinte de la barrière par le prix de l'action est d'autant plus faible que ce dernier est élevé. De ce fait, lorsque le prix de l'action augmente, le coût d'achat du *call down & out* se rapproche de celui du *call* vanille. Pour un prix *spot* de 99 € la valeur du *call down & out* est égale à sa valeur intrinsèque 0 €. Pour que ce prix puisse rejoindre celui du *call* vanille, le taux de croissance, c'est-à-dire le delta, doit être supérieur à 1 :



Données initiales :  $K = 100$ ;  $B = 99$  ;  $r = 5\%$  ;  $\sigma = 25\%$  ;  $\tau = 1$  an.

Lorsque le prix au comptant de l'action vaut 100 €, le montant de l'option et son delta sont respectivement égaux à 1.285 € et 1.2749. Supposons qu'un investisseur détienne un *call down & out* couvert par la vente de 1.2749 action (soit un montant de 127.49 €). Si à l'instant d'après, le *spot* descend en-deçà de la barrière, à 98 € par exemple, la valeur du *call* est nulle et les actions valent à l'achat : 124.94 €. En soldant sa position, le gestionnaire réalise un gain, hors frais de transaction, de :  $127.49 - 124.94 - 1.285 = 1.2648$  €. Si en revanche, la baisse du *spot* s'arrête à 99 €, une perte, hors frais de transaction, de 0.01 € est enregistrée.

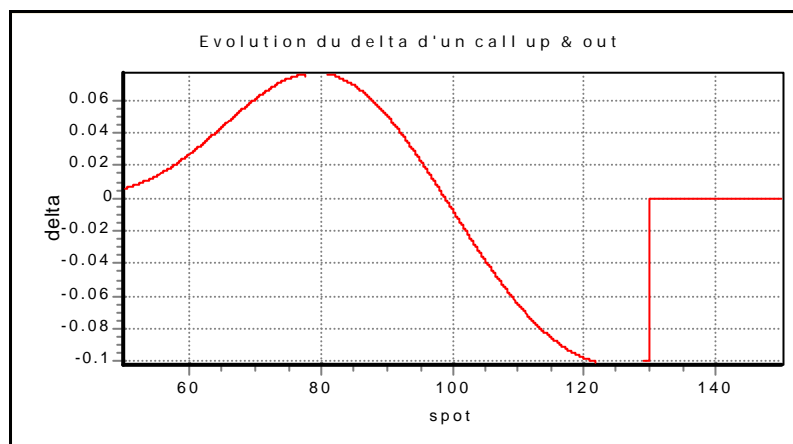
En raison de la valeur élevée du delta ( $>1$ ) la profondeur du franchissement de la barrière modifie nettement le profil de la distribution du rendement d'un *call down & out* couvert. La couverture permet d'amortir la perte du *call* causé par la traversée de la barrière.

Un raisonnement symétrique peut être établi dans le cas des *puts up & out* couverts. En cas de hausse du *spot*, l'achat de l'action sous-jacente servant à la couverture conduit à un gain qui compense en partie la perte du *put* ou qui permet de réaliser un gain.

#### **b. Les options à barrière contraire (reversal)**

Il est rappelé que les options à barrière contraire sont celles dont la barrière est située dans le sens supposé de l'évolution du prix *spot* de l'action : *up & out* pour un *call* et *down & out* pour un *put*.

Le delta des options à barrière désactivante contraire n'est pas à croissance monotone et sa dérivée n'est continue :

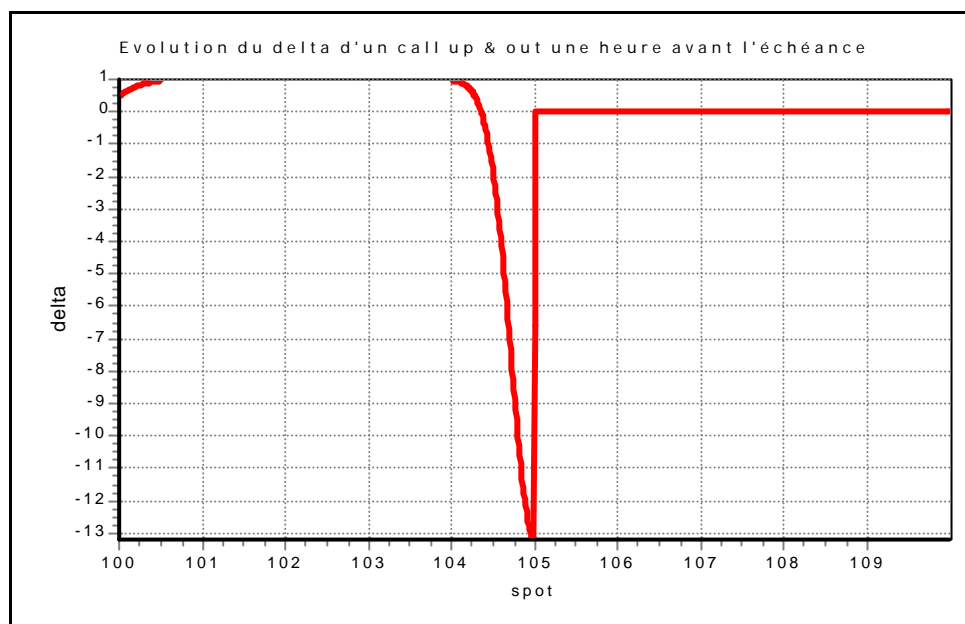


Données initiales :  $K = 100$ ;  $B = 130$  ;  $r = 5\%$  ;  $\sigma = 25\%$  ;  $\tau = 1$  an.

La rupture du delta au voisinage de la barrière est la source des principales difficultés rencontrées dans la gestion dynamique des options à barrière. Dans cet exemple, pour un *spot* égal à 129.99 € le delta est égal à environ -0.1 et pour un *spot* égal à 130 €, le delta est nul. Si



le *spot* dépasse la barrière, l'achat de l'action compense la perte du *call*. Lorsque l'échéance est très proche la perte du *call* peut ne plus être amortie par la détention de l'actif sous-jacent :



Données initiales :  $K = 100$ ;  $B = 105$  ;  $r = 5\%$  ;  $\sigma = 25\%$  ;  $\tau = 1$  an.

Supposons qu'une heure avant l'échéance de l'option, le prix de l'action soit égal à 104 €. Dans cette hypothèse, le delta du *call up & out* vaut 0.9764. En théorie, le titulaire de ce *call* couvert peut voir ses pertes augmentées en raison de la couverture. En effet, si au cours de la dernière heure de vie de l'option le *spot* devient égal à 106 €, l'investisseur subit la perte de la valeur du *call up & out* : 3.9989 € et il réalise simultanément une moins value sur le débouclage de la position investie sur l'action : 1.9528 €. Dans cet exemple, la couverture du *call up & out* entraîne une perte supérieure d'environ 50 % par rapport à la perte occasionnée par la seule détention du *call up & out*.

Supposons à présent qu'une heure avant l'échéance de l'option, le montant de l'action soit égal à 104.9 €. La valeur du delta du *call up & out* est -12.3533. Si au terme de la vie de l'option le cours de l'action termine à 104 €, l'investisseur possédant le *call up & out* couvert réalise un gain à l'exercice de l'option de :  $4 - 1.2927 = 2.7073$  € mais il enregistre une perte conséquente en débouclant sa position investie sur l'action :  $12.3533 \times 0.9 = 11.80$  €. La couverture du *call* engendre une perte supérieure d'environ 400 %.

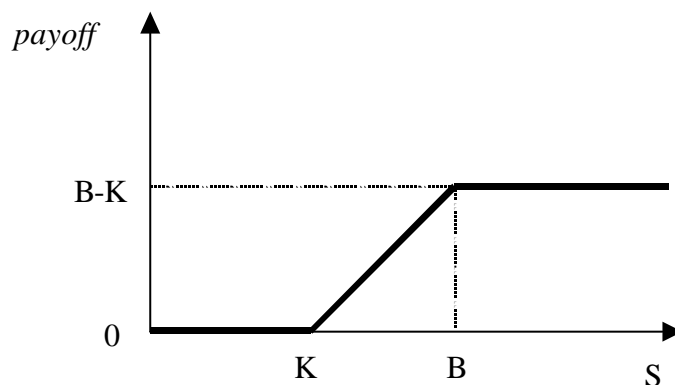
Dans les deux cas, la couverture dynamique en delta a augmenté la perte. C'est la raison pour laquelle, les options à barrière contraire sont réputées plus difficiles à couvrir que les options à barrière régulière.

### c. Le rebate et le caractère américain, deux facteurs de stabilité dans la gestion dynamique

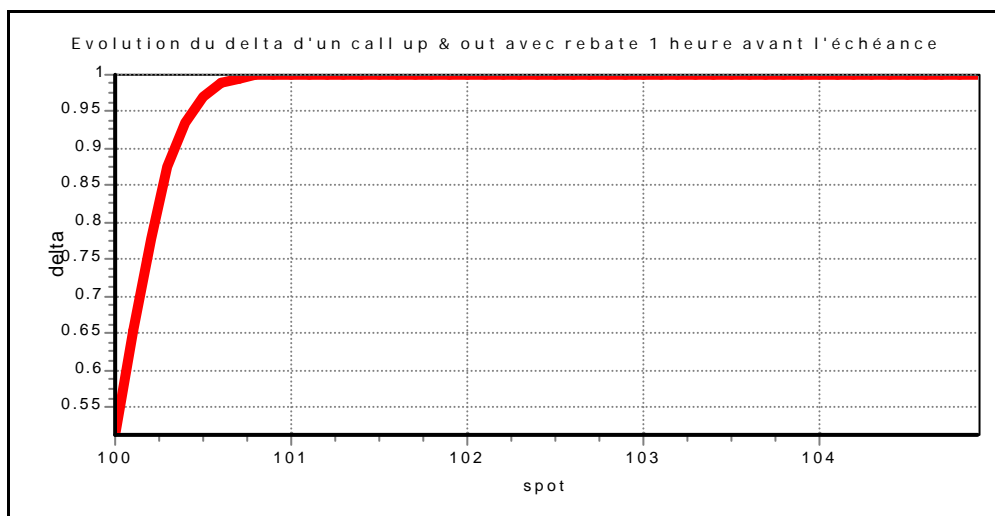
Ici, nous ne traiterons que les options à barrière désactivante puisqu'une option à barrière activante devient une option vanille dès lors que la barrière est franchie. Ainsi, une option à barrière activante américaine ne peut être exercée avant que la barrière soit franchie.

#### 1 - Effet du rebate

L'introduction d'un *rebate* approprié résout les problèmes de couverture des options à barrière. Dans le cas d'un *call up & out*, en introduisant un *rebate* égal à la différence  $B - K$  entre la barrière  $B$  et le prix d'exercice  $K$ , le *payoff* est continu et ressemble à celui d'un *call spread* :



En fait, nous avons supposé que le *rebate* était versé à l'échéance. S'il est donné à l'instant où le prix de l'action dépasse la barrière, aucune discontinuité est constatée dans le delta comme le révèle le graphique ci-dessous représentatif de l'évolution du delta d'un *call up & out* une heure avant son échéance en fonction du prix de l'action :



Données initiales :  $K = 100$  ;  $B = 105$  ;  $R = 5$  ;  $r = 5\%$  ;  $\sigma = 25\%$  ;  $\tau = 1$  an.

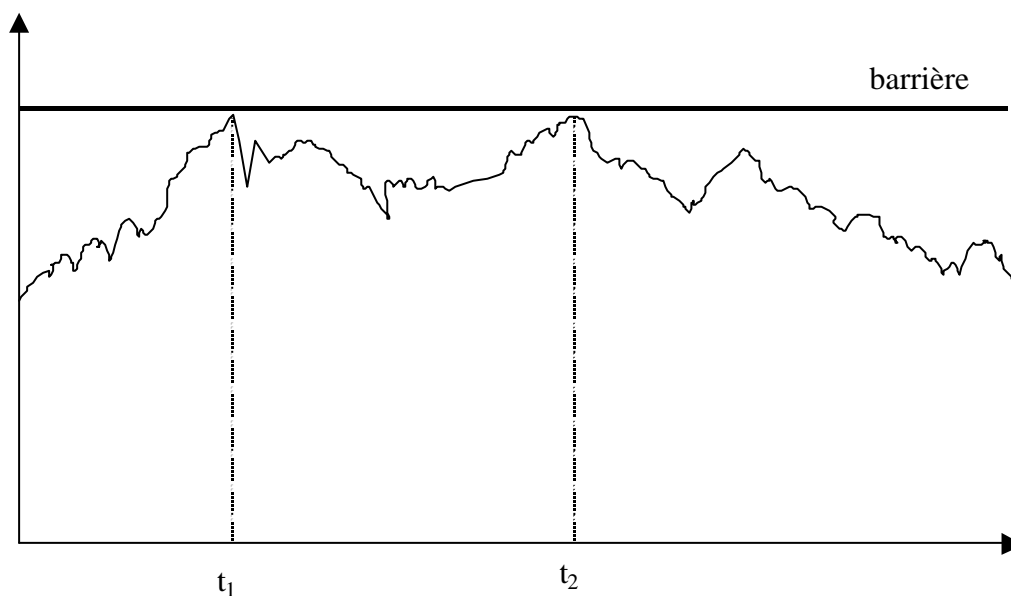
Une heure avant l'échéance, le delta du *call up & out*, avec un *rebate* approprié, est extrêmement stable à gauche de la barrière. Au niveau de la barrière et au-delà, le delta est nul. Mais cela ne gêne en rien le paiement de l'option à l'échéance car posséder 1 action à 105 € et un emprunt de 100 € est équivalent, hors frais de transaction, à détenir aucune action et un emprunt de 5 €.

L'introduction d'un *rebate* permet de résoudre les problèmes de gestion dynamique en stabilisant le delta des options à barrière à l'échéance. Une option à barrière intégrant un *rebate* est égale à la somme d'une option à barrière sans *rebate* et d'une option digitale cash ou rien à barrière dont la soulte est égale à la valeur du *rebate*. En conséquence, le vendeur d'une option à barrière sans *rebate* peut réduire son risque lié à une gestion dynamique des actifs en vendant séparément une option digitale cash ou rien à barrière.

## 2 - Effet du caractère américain

Si une option à barrière (supposée constante) **contraire** est américaine, alors son delta est stabilisé. En effet, si le prix de l'action atteint la valeur précédant la barrière, l'option doit être exercée de manière anticipée.

Le graphique suivant représente l'évolution du prix d'une action par rapport à une barrière.



En  $t_1$  et en  $t_2$ , le prix *spot* se situe juste en-dessous de la barrière. Si la barrière est atteinte la valeur de l'option est nulle. Par conséquent, la valeur intrinsèque d'un *call* ne peut

être supérieure à celle observée en ces deux dates. Le gain réalisé à la date  $t$  actualisé à l'instant initial est pour la date  $t_1$ . Si la barrière n'est pas constante, ce résultat n'est pas toujours maintenu.

Une option américaine pouvant être exercée à tout instant, le prix d'un *call up & out* américain est une fonction croissante du *spot* jusqu'à la barrière puis il est nul au-delà. L'hypothèse selon laquelle les agents économiques préfèrent plus de richesse à moins de richesse implique l'exercice anticipé de l'option au prix précédent celui de la barrière. En supposant que les trajectoires des prix des actifs sont continues, en théorie, le prix d'un *call up & out* américain sans *rebate* est égal à celui d'un *call up & out* européen avec un *rebate* égal à la différence entre la valeur de la barrière et le prix d'exercice.

En pratique, ce n'est pas le cas. Tout d'abord, les montants possibles des actions sont séparés d'une valeur minimale (*tick*) et les trajectoires des prix des actions ne sont pas continues. C'est pourquoi en réalité, les prix des options à barrière contraire américaines sont légèrement inférieurs à ceux des options à barrière avec un *rebate*.

## SECTION 3. La duplication statique

Le gamma des options exotiques est souvent plus élevé que celui des options vanilles. Aussi, les variations du delta des options exotiques sont de forte amplitude. La prise en compte des coûts de transaction complique la réplication dynamique d'une option exotique dans le sens où il n'est pas possible de réajuster la position à chaque instant. La gestion dynamique des options exotiques est difficile.

A l'opposé de la gestion dynamique, une autre méthode de couverture, qualifiée de statique, des options exotiques existe. La couverture des options est réalisée à partir d'options vanilles. Carr, Ellis Gupta et Chou<sup>200</sup> ont largement contribué aux recherches sur ces méthodes.

---

<sup>200</sup> CARR P., ELLIS K. et GUPTA V., "Static Hedging of Path-Dependent Options", Working Paper, Cornell University, 1996.

CARR P., ELLIS K. et GUPTA V., "Static Hedging of Exotic Options", Working Paper, Cornell University, mars 1996.

CARR P. et CHOU A., "Breaking Barriers : Static Hedging of Barrier Securities", Working Paper, novembre 1996.

CARR P. et CHOU A., "Hedging Complex Barrier Options", Working Paper, Avril 1997.

Ces papiers sont téléchargeables à partir du site internet de CARR : "<http://www.math.nyu.edu/research/carrp/>".

## § 1 - La couverture statique des options à barrière

Nous commençons par définir les relations de symétrie entre un *call* et un *put* introduite par Carr, Ellis et Gupta. Les égalités trouvées par ces auteurs sont à la base de la totalité des techniques de réplication statique évoquées dans un second temps.

### A - Les relations de symétrie

Carr, Ellis et Gupta ont présenté un nouveau type de relations, liant les *calls* et les *puts* vanilles, semblable à la relation de parité, que nous exposons maintenant.

Les hypothèses permettant de vérifier cette relation sont plus contraignantes que celle admises pour la relation de parité :

- sous la mesure martingale équivalente, le processus de diffusion du prix *spot* de l'actif a un drift nul ;
- la volatilité locale du prix *forward* de l'actif est supposé égale pour deux valeurs  $F_1$  et  $F_2$  de ce prix vérifiant l'hypothèse<sup>201</sup>  $F_1 F_2 = F^2$  ;
- le marché est supposé sans friction et libre d'arbitrage.

On note :  $K_C$  (resp.  $K_P$ ) le prix d'exercice du *call* (resp. *put*), sous la condition  $K_C K_P = F^2$ , avec  $F$  le prix *forward* (d'échéance l'échéance de l'option) de l'actif sous-jacent.

Les trois principales relations de symétrie lient les options vanilles d'une part et les options digitales d'autre part :

- Relation de symétrie<sup>202</sup> des options vanilles

$$\frac{Call(K_C)}{K_C} = \frac{Put(K_P)}{K_P}$$

- Relations de symétrie des options digitales

$$\sqrt{K_C} BC(K_C) = \frac{GP(K_P)}{\sqrt{K_P}} \quad \sqrt{K_P} BP(K_P) = \frac{GC(K_C)}{\sqrt{K_C}}$$

où  $BC$  (resp.  $BP$ ) est un *call* (resp. *put*) digital cash ou rien et  $GC$  (resp.  $GP$ ) un *call* (resp. *put*) digital actif ou rien.

Ces deux dernières égalités ne sont vérifiées que sous l'hypothèse d'une structure déterministe de la volatilité.

<sup>201</sup> L'hypothèse d'une structure de volatilité déterministe vérifie cette conjecture.

<sup>202</sup> Cette première relation est uniquement due à CARR, "European *put call* Symétrie", Working Paper, 1995.

## B - La couverture du *call down & out*

La technique de couverture d'un *call down & out* en fonction d'options vanilles s'effectue en deux étapes. Le prix d'exercice  $K$  est supposé de valeur supérieure à la barrière  $B_B$ .

Les auteurs font remarquer que si la barrière n'est pas atteinte, alors le *payoff* de l'option est identique à celui d'un *call* vanille de même prix d'exercice  $K$ . Mais, si le prix de l'actif dépasse ou égale, à l'échéance et pour la première fois, la valeur de la barrière  $B_B$  le prix de l'option est nul. Si par ailleurs  $S_T = B_B$ , grâce à la relation de symétrie il vient :

$$Call(K) = \frac{K}{H} Put\left(\frac{H^2}{K}\right)$$

En conséquence, le prix de réplication selon Carr, Ellis et Gupta d'un *call down & out* est donné par :

$$Call(K) - \frac{K}{H} Put\left(\frac{H^2}{K}\right) \text{ avec } H < K$$

Si la barrière est atteinte avant la date d'échéance, une application directe de la relation de symétrie montre que ce portefeuille a une valeur nulle. La position peut être débouclée sans engendrer de plus ou moins-value.

## C - La couverture du *call up & out*

Carr, Ellis et Gupta proposent de décomposer la valeur du *call up & out* à partir des options *up & in*. Le principe de réplication est plus complexe et aboutit à l'expression du *call up & out* en fonction des options digitales<sup>203</sup>.

La première structure de couverture qu'ils proposent est la suivante :

$$Call(K) - PutUp \& In(K, B_H) - (B_H - K)Up \& In Bond(B_H)$$

Le raisonnement des auteurs est le suivant. Si la barrière  $B_H$  n'est jamais atteinte, le *payoff* est identique à celui d'un *call* vanille. Dans ce cas, ils montrent que la vente d'un *put up & in* de *strike*  $B_H$  et de  $(B_H - K)$  options sur une obligation zéro-coupon à barrière<sup>204</sup>  $B_H$  *Up & In Bond*) ne nécessitent aucun règlement. Si la barrière est atteinte, la valeur du *call up & out* s'annule tandis que les options *up & in* sont activées. Le prix de l'actif est alors égal à  $B_H$ , ce qui, en raison de la relation de parité, permet de conclure que la valeur du portefeuille répliquant est nul.

---

<sup>203</sup> La technique de réplication des options digitales réalisée à partir de *calls spreads* permet de mener le raisonnement jusqu'à l'expression du *call up & out* en fonction d'options vanilles.

<sup>204</sup> Par définition cette option paie 1 € à l'expiration si la barrière a été atteinte.

La seconde étape du raisonnement est rendue nécessaire par la faible liquidité des options à barrière activante. A l'aide de la relation de symétrie, le *put up & in* peut être répliqué avec l'achat de  $K/B_H$  *call* de *strike*  $B_H^2/K$ . De plus l'UIB peut être répliqué avec l'achat de 2 *calls* digitaux de prix d'exercice  $B_H$  et de l'achat de  $1/B_H$  *call* de *strike*  $B_H$ .

Ainsi le portefeuille final répliquant le prix d'un *call up & out* s'écrit :

$$Call(K) - \frac{K}{B_H} Call\left(\frac{B_H^2}{K}\right) - \left[ 2(B_H - K) Call\,Digital(B_H) + \frac{B_H - K}{B_H} Call(B_H) \right]$$

## § 2 - La couverture statique d'autres options exotiques

Dans ce paragraphe, nous poursuivons le principe de réplication statique dans le cas d'un *roll down call*, d'un *ratchet call* puis d'un *strike lookback call* sans toutefois faire appel aux raisonnements de Carr, Ellis et Gupta.

### A - La réplication statique d'un *roll down call* étendu

Un *roll down call* peut être facilement étendu à  $n$  ( $n > 2$ ) barrières basses.

La couverture proposée par Carr, Ellis et Gupta est la suivante :

$$ERDC(K_i, B_{B,i}) = DOC(K_0, B_{B,1}) + \sum_{i=1}^n [DOC(K_i, B_{B,i+1}) - DOC(K_i, B_{B,i})]$$

où  $K_0$  est le prix d'exercice initial,  $K_i, i \in \{1; \dots; n\}$ , représente le prix d'exercice effectif lorsque la barrière  $B_{B,i}$  a été atteinte, sous la condition  $K_i \in [B_{B,i}, K_{i-1}]$ .

Lorsque  $S = B_{B,1}$ , la position se réécrit :

$$ERDC(K_i, B_{B,i}) = DOC(K_1, B_{B,2}) + \sum_{i=2}^n [DOC(K_i, B_{B,i+1}) - DOC(K_i, B_{B,i})]$$

Enfin, à l'aide de la relation de symétrie, il est possible d'exprimer la valeur du *roll call down* étendu en fonction de *calls* et de *puts* vanilles :

$$ERDC(K_i, B_{B,i}) = C(K_0) - \frac{K_0}{B_{B,1}} P\left(\frac{B_{B,1}^2}{K_0}\right) + \sum_{i=1}^n \left[ \frac{K_i}{B_{B,i}} P\left(\frac{B_{B,i}^2}{K_i}\right) - \frac{K_i}{B_{B,i+1}} P\left(\frac{B_{B,i+1}^2}{K_i}\right) \right]$$

### B - La réplication statique d'un *ratchet call*

Un *ratchet call* est un *roll down call* étendu qui ne peut être désactivé. La dernière barrière désactivante est supprimée et tous les prix d'exercice, hormis le premier, sont supposés égaux aux barrières.

Le prix d'un *ratchet call* est donc assez similaire à celui d'un *roll down call* étendu.

$$RC(K_0, B_{B,i}) = DOC(K_0, B_{B,1}) + \sum_{i=1}^{n-1} [DOC(B_{B,i}, B_{B,i+1}) - DOC(B_{B,i}, B_{B,i})] + DIC(B_{B,n}, B_{B,n})$$

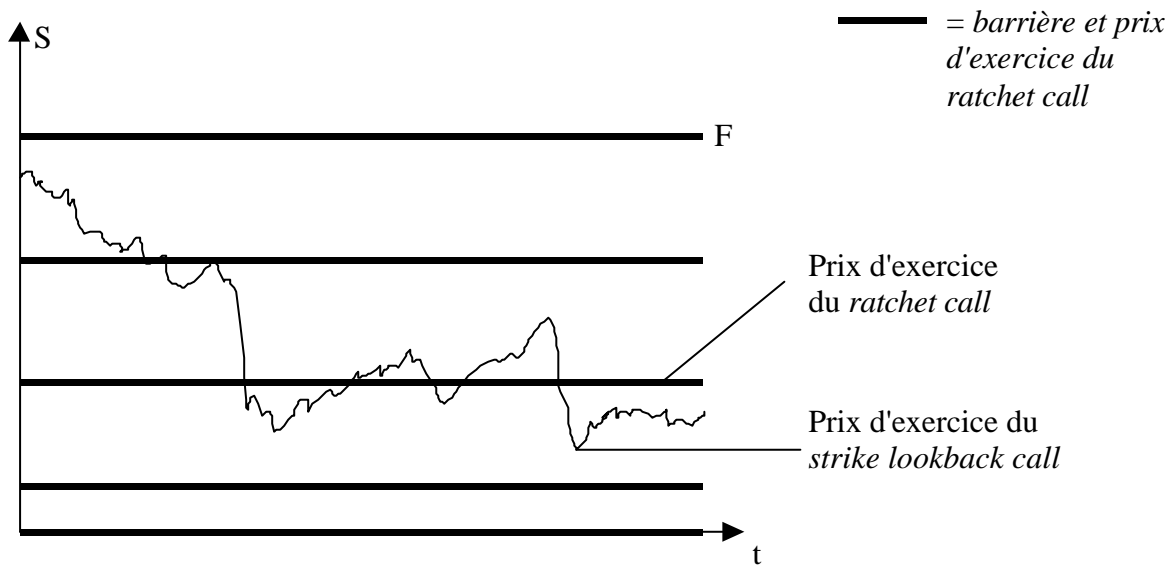
A l'aide de la relation de symétrie, il vient :

$$RC(K_0, B_{B,i}) = C(K_0) - \frac{K_0}{B_{B,1}} P\left(\frac{B_{B,1}^2}{K_0}\right) + \sum_{i=1}^{n-1} \left[ P(B_{B,i}) - \frac{B_{B,i}}{B_{B,i+1}} P\left(\frac{B_{B,i+1}^2}{B_{B,i}}\right) \right] + P(B_{B,n})$$

### C - La réplication statique d'un *strike lookback call*

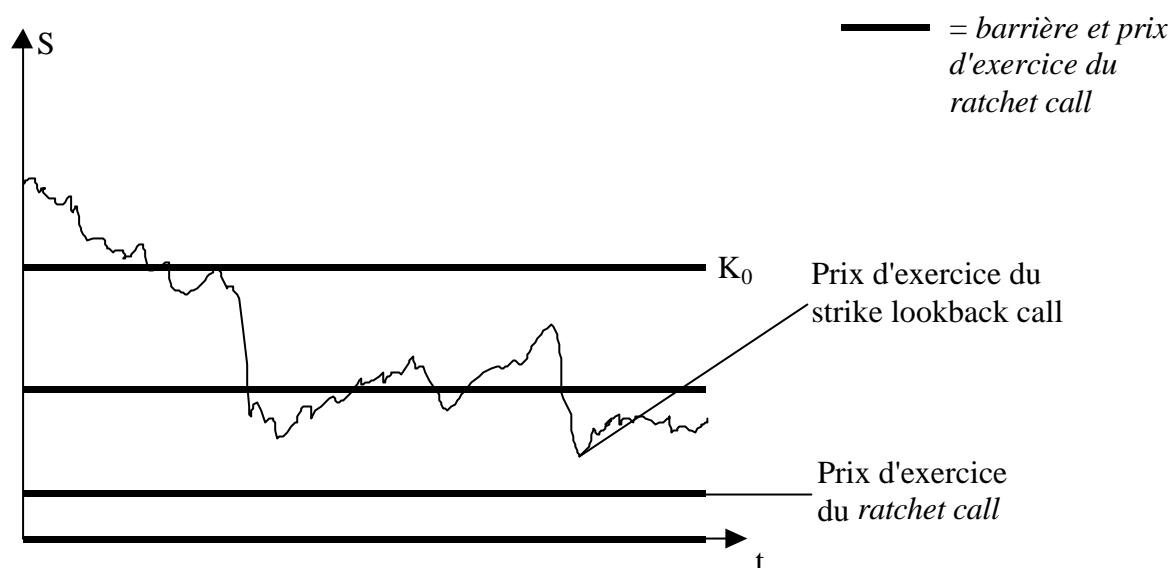
Deux couvertures statiques sont proposées dans ce cas. La première surestime le prix de l'option tandis que la seconde le sous-estime.

Le prix d'un *strike lookback call* peut être assez facilement sous-estimé à partir d'un *ratchet call*. En effet, un *ratchet call* dont le premier prix d'exercice est égal au prix *forward* de l'actif sous-jacent avec des barrières étalonnées jusqu'à 0 a un prix d'exercice supérieur ou égal à celui du *strike lookback call* :



De la même manière, il est possible avec un *ratchet call* de surestimer le prix d'un *strike lookback call* en considérant que le prix d'exercice effectif est égal à la valeur de la barrière basse suivante :





En augmentant le nombre de barrières, l'écart entre les deux prix des *ratchet call* surestimant et sous-estimant la valeur du *strike lookback call* diminue jusqu'à ce que, pour un nombre de barrières infini, les prix se rejoignent.

Selon cette théorie, la duplication statique prévient d'une évolution défavorable de la couverture dynamique des options exotiques.

D'une part, si le portefeuille constitué à partir d'options vanilles duplique correctement le comportement de l'option exotique traitée, alors les mêmes difficultés de gestion doivent être rencontrées. Les mouvements du delta du portefeuille peuvent être très importants et ils doivent présenter des discontinuités identiques à celles constatées pour l'option exotique considérée.

D'autre part, les hypothèses sur la volatilité sont très restrictives. Carr Ellis et Gupta supposent qu'automatiquement et grâce à la relation de symétrie, il est possible de liquider certaines portions du portefeuille de valeurs nulles. Or, la relation de symétrie n'est vraie qu'en l'absence de *smile* de volatilité<sup>205</sup> pourtant constaté sur les marchés optionnels.

<sup>205</sup> De plus, les volatilités implicites d'un *call* et d'un *put* de même *strike* sont différentes. Enfin, la relation de symétrie ne tient pas non plus sous les hypothèses de volatilités stochastiques.

## SECTION 4. Les options exotiques au profit de l'assurance et de la spéculation

Dans le cadre de certaines hypothèses, Carr, Ellis, Gupta et Chou ont prouvé que la quasi-totalité des options exotiques est décomposable en un portefeuille d'options vanilles. Selon ces auteurs, l'attrait des options exotiques serait donc limité. Pourtant, ce marché continue à se développer et l'introduction dans un futur proche des options à barrière sur les marchés organisés ne serait pas surprenante.

A la fin de la section précédente, nous avons doré et déjà montré que le point de vue de Carr Ellis et Gupta n'était pas totalement justifié. De fait, nous allons maintenant rappeler tout l'intérêt qu'offre les options exotiques dans la gestion de portefeuille de valeur mobilière.

### § 1 - L'assurance de portefeuille usuelle

L'un des rôles majeurs des options dans la gestion des portefeuilles est celui de l'assurance de portefeuille<sup>206</sup>. La notion d'assurance est introduite sous l'hypothèse que le portefeuille n'est composé que d'un seul titre. Puis, nous étendons le principe dans le cadre d'un portefeuille constitué de plusieurs actifs.

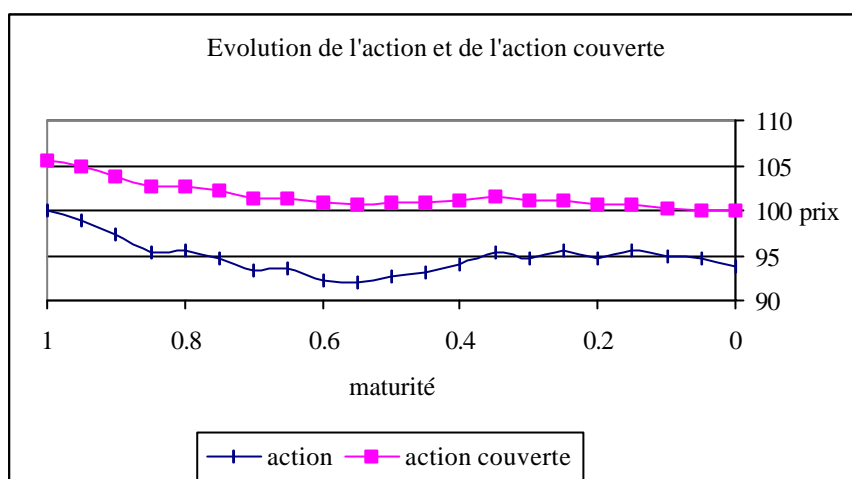
#### A - L'assurance d'un titre unique

En raison de son effet de levier, une option de vente permet de spéculer sur la baisse de l'actif sous-jacent. Elle peut aussi servir pour l'assurance de portefeuille. En échange de la prime perçue à la conclusion du contrat, le vendeur s'engage à payer à l'échéance la valeur intrinsèque de l'option. Une action couverte correspond à l'achat de l'action et d'un *put* dont le prix d'exercice est égal au seuil minimum à garantir.

Notons  $P_{\text{Min}}$ , la valeur minimale souhaitée d'une action couverte à l'échéance. Quelle que soit l'évolution du cours du sous-jacent, en achetant l'action et un *put* de prix d'exercice  $P_{\text{Min}}$ , la valeur minimale de l'action couverte est assurée :

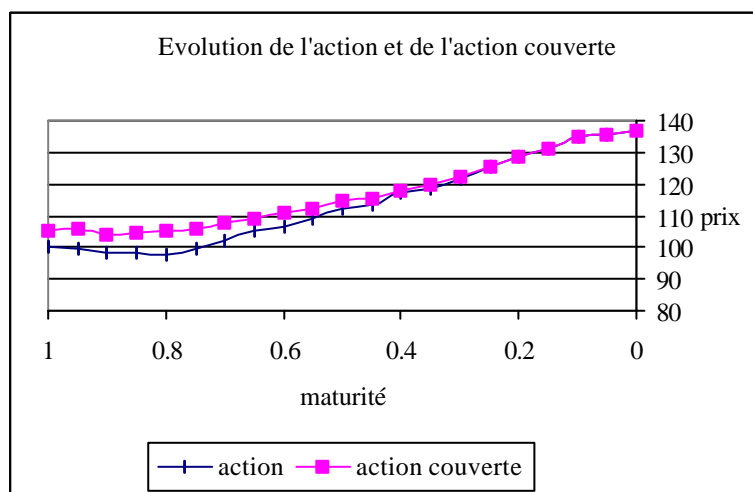
---

<sup>206</sup> Voir, par exemple, AUGROS J.-C., *Les options négociables*, Ed Vuibert Gestion, mai 1987.

1<sup>er</sup> cas : Le cours de l'action termine sous le seuil  $P_{\text{Min}} = 100$ .

Données initiales :  $S = 100$  ;  $K = 100$  ;  $r = 5\%$  ;  $\sigma = 20\%$  ;  $\tau = 1$  an.

La détention du *put* garantit au terme de l'option une valeur minimale, dans l'exemple 100 €, du portefeuille. Avant son échéance, le prix d'un *put* européen n'est pas forcément supérieur à sa valeur intrinsèque. La valeur du portefeuille peut donc être inférieure au prix d'exercice du contrat optionnel. L'assurance n'est effective qu'à l'échéance de l'option.

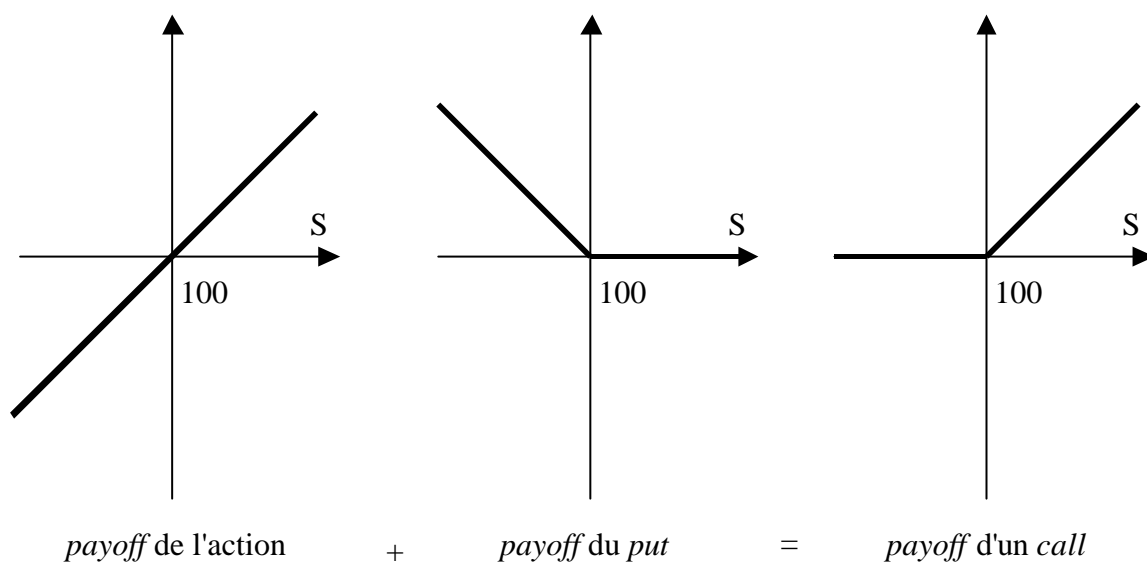
2<sup>ème</sup> cas : Le cours de l'action termine au dessus du seuil  $P_{\text{Min}} = 100$ .

L'évolution favorable du cours de l'action rend désuète la garantie fournie par la détention du *put*. Les valeurs de l'action et de l'action couverte se rejoignent à l'échéance.

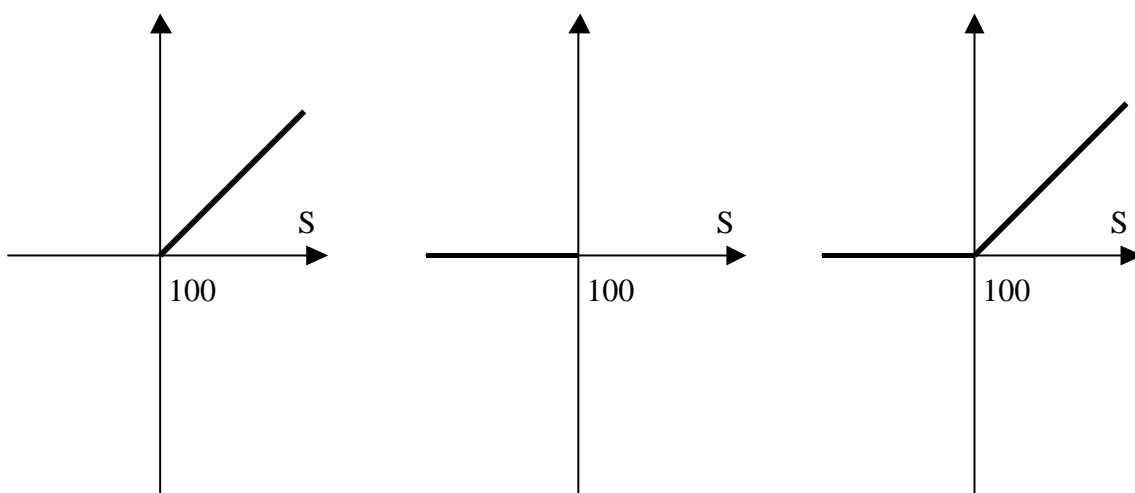
La valeur minimale  $P_{\text{Min}}$  est garantie quelle que soit la valeur terminale du cours de l'action. Cette assurance a un coût unique : le montant de la prime versé lors de l'achat du *put*.

En réalité, il n'existe généralement pas sur le marché un *put* correspondant aux besoins spécifiques du gestionnaire. La maturité et le prix d'exercice recherchés peuvent ne pas être traités. La duplication dynamique du *put*, abordée au quatrième chapitre, s'avère alors indispensable pour garantir une valeur minimale au portefeuille.

Le profil du *payoff* à l'échéance d'une action couverte ressemble à celui d'un *call*. Souvent, le nom de *call* synthétique remplace celui d'action couverte.



Le terme de *call* synthétique ne nous semble pas réellement approprié. La stratégie garantie un seuil minimum. C'est la raison pour laquelle, nous préférons décomposer différemment ce portefeuille à l'aide d'options digitales :



*payoff* d'un *call* actif ou rien + *payoff* d'un *put* cash ou rien = *payoff* d'une action couverte

Dans le cadre des hypothèses de Black et Scholes, le prix de l'action couverte est égale à :

$$100 + 5.57 = 105.57 \text{ €}$$

La somme des prix du *call* actif ou rien de prix d'exercice 100 et d'un *put* cash ou rien de prix d'exercice 100, dont la soulté est égal au seuil minimum garantit 100, vaut :

$$63.68 + 41.89 = 105.57 \text{ €}$$

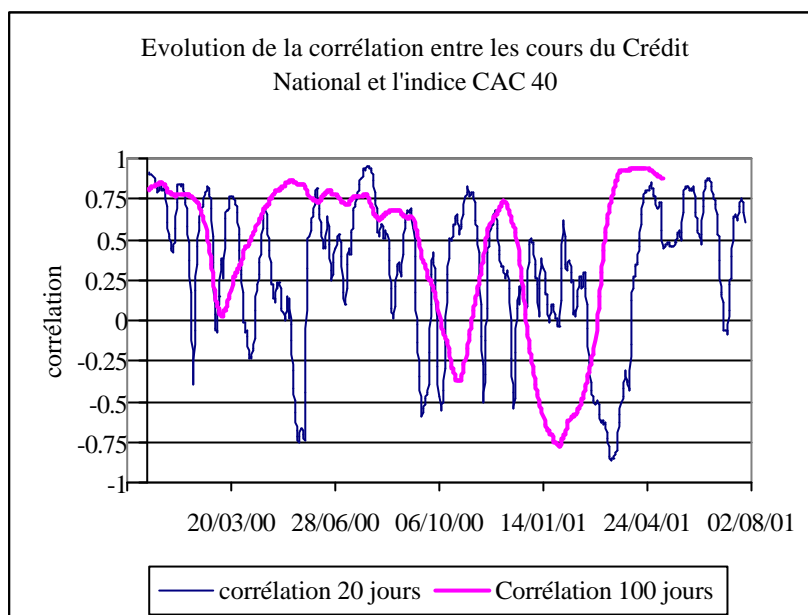
Les deux stratégies sont bien équivalentes.

## B - L'assurance d'un portefeuille

Plus que l'assurance d'un titre unique, l'assurance d'un portefeuille diversifié en plusieurs actions est souvent recherchée. Il n'existe pas sur le MONEP de *put* spécifique aux besoins de chacun des investisseurs. La composition de leur portefeuille est unique. La couverture s'effectue par l'achat d'un *put* portant sur un actif dont le rendement est le plus possible corrélé avec celui du portefeuille à couvrir<sup>207</sup>. Souvent, le *put* porte sur l'indice de référence du marché tel le CAC 40.

En général, ce type de couverture est efficace. Mais elle n'est pas parfaite parce que le coefficient de corrélation est une mesure qui se révèle encore plus instable que celle des volatilités :

<sup>207</sup> Si la corrélation la plus élevée en valeur absolue est négative, l'achat d'un *call* sur le titre convient mieux.



Le CAC 40 est un indice pondéré par les capitalisations boursières des entreprises cotées. Or, les récentes fusions et acquisitions modifient sensiblement le comportement de l'indice. D'abord parce que les actions concernées ne sont plus cotées. Par exemple, l'indice CAC 40 était durant l'été 1999 composé de seulement 37 actions, en raison de l'OPE lancée par la BNP sur la Société Générale et Paribas. Ensuite parce qu'il ressort de ces opérations des groupes dont la capitalisation boursière est considérable et qui à eux seuls constituent une grande partie des volumes monétaires échangés. De la fusion Elf- Total récemment conclue, il ressort une société émergente dont la capitalisation boursière est supérieure à 10 % du poids de la capitalisation totale de l'indice CAC 40. En terme de volumes échangés, l'influence des cours des plus petites sociétés s'amenuise ; l'indice n'est plus représentatif des montants des transactions effectuées. Afin de remédier à ce biais, certains analystes proposent de réduire le nombre de sociétés prises en compte dans le calcul de l'indice à 35 voire 30.

## § 2 - Les apports des options exotiques

Les options exotiques offrent de nouvelles stratégies financières. Tout d'abord, le *payoff* de l'option à l'échéance peut être ajusté aux besoins réels de l'investisseur. Par exemple, le paiement final peut dépendre d'un ou plusieurs actifs risqués de nature différente (action, taux, change, ...). Ensuite, les gérants peuvent bénéficier d'un coût d'assurance de portefeuille moindre en raison de la limitation des éventuels gains par l'ajout d'une ou plusieurs barrières conditionnelles. Plus généralement, tandis que les options vanilles européennes n'assurent un portefeuille qu'indépendamment de l'évolution du cours de l'actif sous-jacent, certaines

options exotiques permettent de mieux gérer les risques encourus par une évolution spécifique du prix du sous-jacent.

#### A - La recherche des flux financiers souhaités

L'apport le plus remarquable des options exotiques dans la réalisation des profils souhaités à l'échéance résultent des options portant sur plusieurs actifs risqués, des options liant les performances obligataires à celles des actions et des options dépendent d'un actif et d'un taux de change. Ces options exotiques permettent une meilleure assurance des portefeuilles diversifiés sur plusieurs marchés, à un prix inférieur à la somme de plusieurs options vanilles nécessaires pour obtenir une couverture similaire.

Par exemple, les options *quanto* donnent la possibilité à l'investisseur de spéculer sur un marché étranger sans être exposé au risque de change.

#### B - La recherche d'un produit spéculatif

Par essence, le marché des options est très spéculatif et il suffit de considérer l'exemple la faillite de la Bayrings pour comprendre que la spéculation peut être dangereusement "illimitée". Mais en se plaçant du côté de ceux qui ont perçu les gains cette spéculation a été "savoureusement" enregistrée, hormis les répercussions liées à la faillite d'un confrère. Certaines institutions financières sont parvenus à déstabiliser suffisamment la monnaie d'un pays pour que celle-ci soit dévaluée.

Avec le marché des options exotiques, les rendements peuvent être, en théorie, presque infinis comme nous le montrons à présent.s.

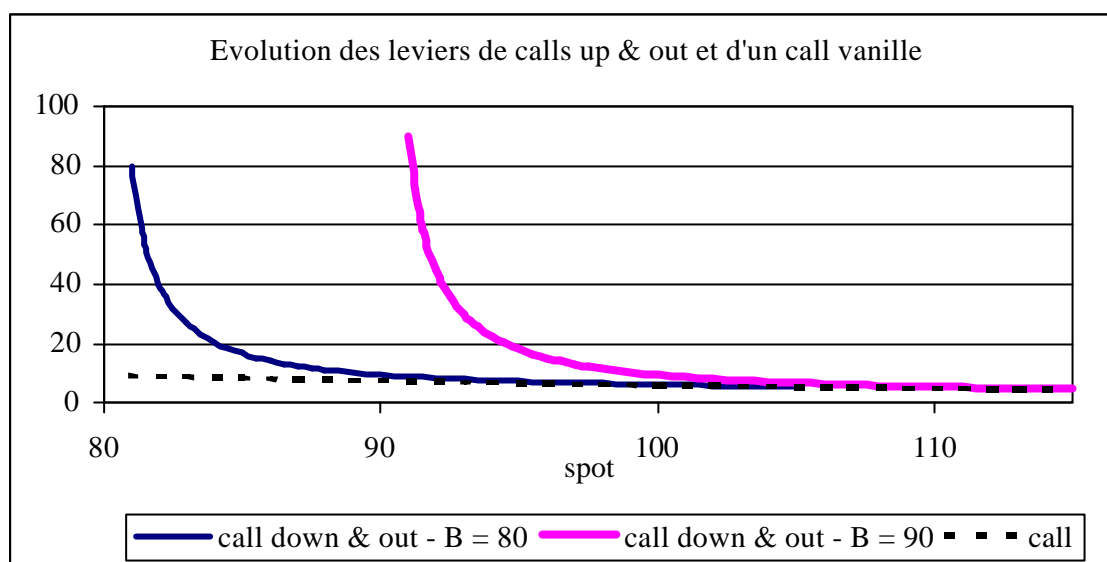
Le levier<sup>208</sup> d'une option défini par le produit  $\frac{dC/C}{dS/S} = \delta \times \frac{S}{C}$ , où S est le prix du sous-

jacent, C le prix de l'option et  $\delta$  la dérivée partielle de C par rapport à S, donne la possibilité de réaliser des stratégies très spéculatives. Un levier égal à 5 signifie que le prix de l'option a des fluctuations 5 fois plus importantes que celles du sous-jacent. La courbe du levier des options exotiques en fonction du prix du sous-jacent peut être très différente de celle des options vanilles.

Par exemple, dans le cadre des hypothèses de Black et Scholes, le levier attendu d'un *call* peut être nettement inférieur à celui d'un *call down & out* (lorsque ce dernier existe) comme le montre le graphique ci-dessous :

---

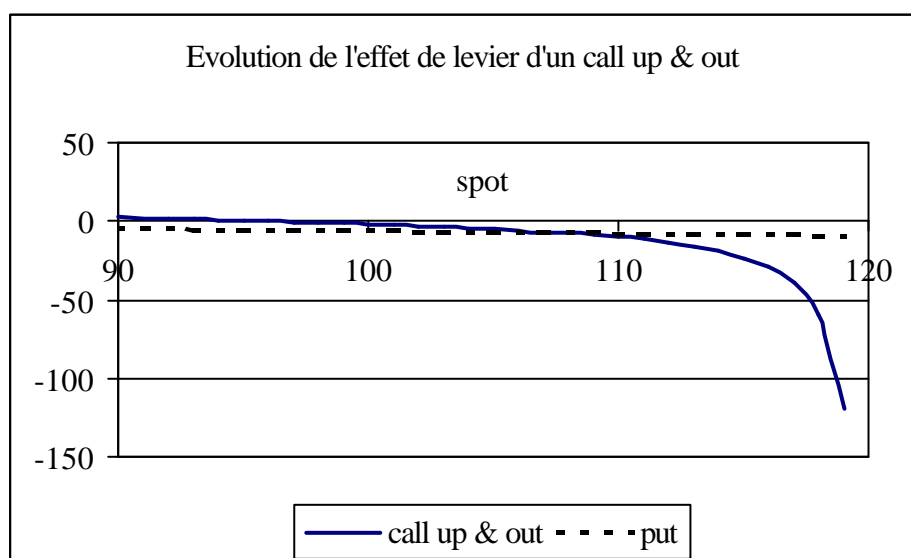
<sup>208</sup> Le levier d'une option est parfois appelé oméga.



Données initiales :  $S = 100$  ;  $K = 100$  ;  $r = 5\%$  ;  $\sigma = 20\%$  ;  $\tau = 1$  an.

L'écart entre le levier d'un *call down & out* et du *call* vanille homologue s'accroît lorsque le prix de l'action se rapproche de la barrière. L'écart diminue avec l'augmentation du montant du sous-jacent. L'achat d'un *call down & out* est plus spéculatif que celui du *call* vanille homologue.

Si la barrière est contraire, l'effet produit sur le levier est fondamentalement différent :



Données initiales :  $S = 100$  ;  $K = 100$  ;  $B = 120$  ;  $r = 5\%$  ;  $\sigma = 20\%$  ;  $\tau = 1$  an.

Le levier est d'abord positif, supérieur à celui d'un *call* vanille, puis il devient très négatif. Dans ce cas, la vente d'un *call up & out* crée un levier considérable.



## C - La recherche d'un coût moins élevé d'assurance de portefeuille

La grande majorité des options exotiques traitées sur le marché intègrent une barrière limitative de la performance du titre. Ceci induit une diminution du prix de l'option parce que le *payoff* et donc la perte possiblement enregistrée par le vendeur est limitée.

Mais par exemple, l'achat d'un *put down & out à rebate* ne limite pas seulement l'assurance du portefeuille en valeur comme le fait un *put* cappé. La date de fin de vie de l'option n'est pas connue avec certitude.

Les options asiatiques partielles ou totales fournissent un autre type d'assurance. Elles évitent la dégradation de la performance d'une stratégie à l'échéance de l'option. Par exemple, de nombreux BMTN<sup>209</sup> sont indexés sur la performance d'un indice de référence entre deux dates. La valeur de l'indice est en général calculée selon une moyenne uniformément pondérée de plusieurs cours de clôture, à l'image des obligations indexées sur action<sup>210</sup>. Le coût de l'option attachée est considérablement réduit sans pour autant trop pénaliser le spéculateur. La prise en compte d'une moyenne plutôt qu'une valeur ponctuelle réduit les conséquences de mouvements erratiques de courte durée.

En résumé, l'assurance de portefeuille constituée à partir d'options exotiques est moins coûteuse, mais en contrepartie elle est plus incertaine soit sur le montant des flux perçus soit sur leur date de perception.

## D - La recherche de la dépendance du chemin suivi

### a. Les asiatiques partielles, un frein à la manipulation des cours

Le risque de manipulation des cours par l'une des deux parties peut être parfois réel. Ce risque augmente d'autant plus si le contrat est une option exotique sur actions.

Par exemple, le vendeur d'une option à barrière peut souhaiter attirer le cours du sous-jacent vers la barrière pour annuler le contrat<sup>211</sup>. Les options *lookback* fournissent un autre motif de manipulation de la valeur du sous-jacent. Généralement, ces options dépendent du maximum ou du minimum du cours du sous-jacent à des dates préfixées. Le titulaire peut être tenté de perturber momentanément les cours pour fixer un meilleur niveau de performance de l'option à l'échéance. Le risque de manipulation n'est pas limité aux seules options *path-dependent*. Ainsi, la valeur des options digitales actif ou rien - *path-independent* - est très

---

<sup>209</sup> Les BMTN sont des bons à moyen terme négociables.

<sup>210</sup> Voir, AUGROS J-C et MORENO M., "Evaluation des obligations indexées sur action", Cahiers de recherche de l'ISFA, 1999.

<sup>211</sup> C'est principalement en raison de la manipulation effective des cours que les options parisiennes ont été créées.

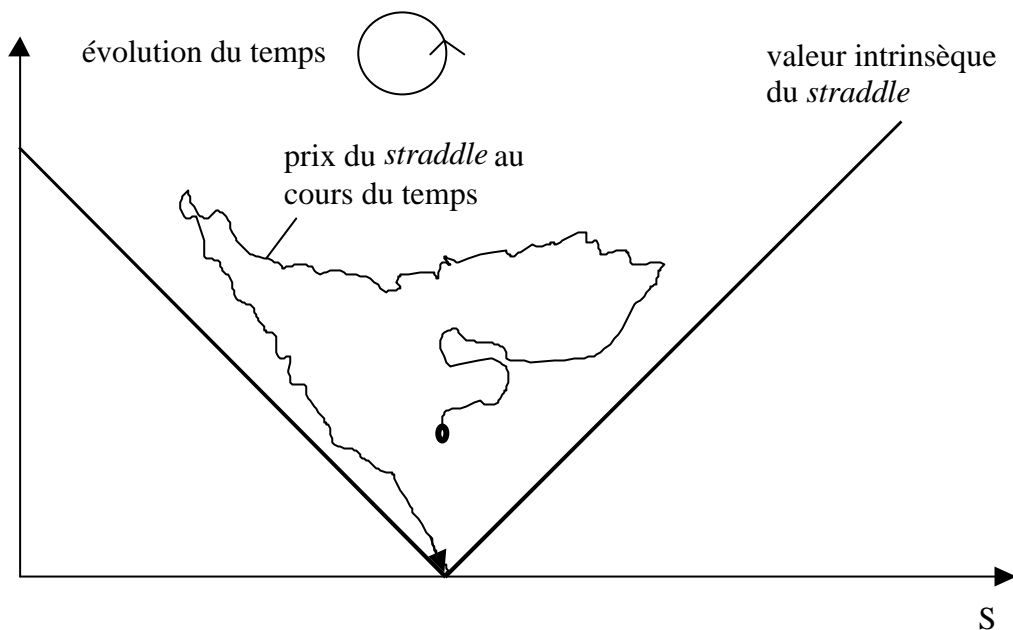
sensible à l'échéance en raison de l'écart important de *payoffs* entre une option qui termine dans la monnaie (le gain enregistré est égal à la valeur de l'actif) et une autre qui finit hors la monnaie (la valeur du *payoff* est nulle).

Il n'est guère envisageable d'influencer un indice tel le CAC 40 en raison non seulement de la capitalisation boursière qu'il représente mais aussi à cause de l'étroite surveillance des arbitres. En revanche, influencer, durant une courte durée, sur une ou plusieurs actions est concevable. Si le calcul des valeurs de référence s'effectue sur plusieurs jours, les manipulations sont plus difficiles à effectuer.

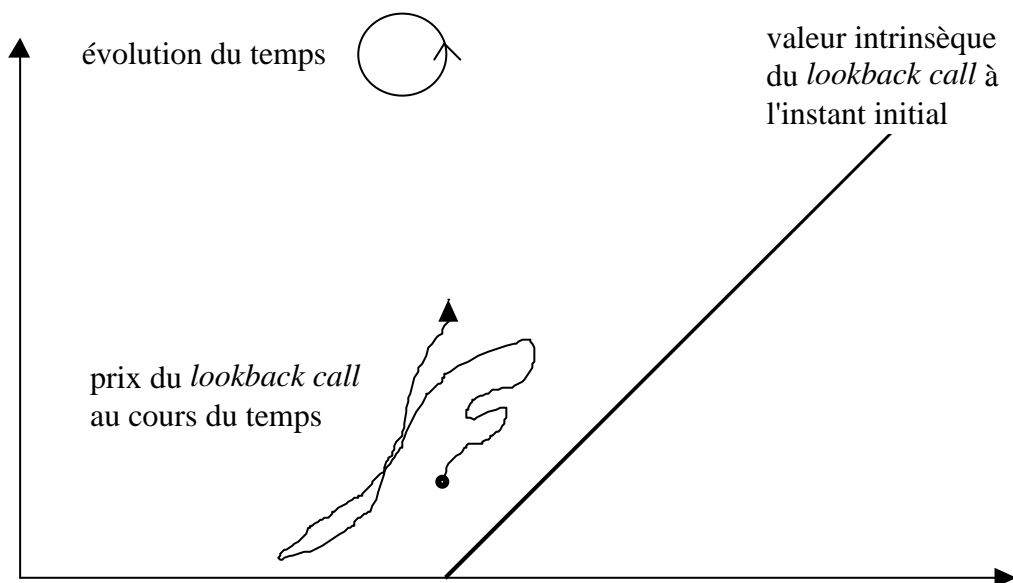
#### ***b. Les lookback, une protection maximale***

Le prix des options *lookback* est réputé élevé. Les opérations financières portant sur ces contrats sont de faibles montants et peu fréquentes. Durant les périodes de fortes volatilités, l'incertitude s'accroît. Etant donné que le prix des options *lookback* est d'autant plus élevé que la volatilité anticipée est importante, l'utilisation de ces produits dérivés est rarement justifiée.

En raison de leur coût prohibitif, ils ne sont pas réellement adaptés à la spéculation sauf dans la perspective d'une forte hausse de la volatilité. Lorsqu'une hausse de la volatilité est anticipée et que le sens de variation du prix du sous-jacent n'est pas pressenti, il est possible de recourir à l'achat d'un *straddle*. Si l'anticipation se révèle exacte, le prix du *straddle* augmente grâce à la hausse de la volatilité tandis que l'effet de la variation du prix du sous-jacent est relativement bien compensé par la détention du *call* et du *put*. Mais si le marché se retourne avant l'échéance alors les deux options peuvent finir à la monnaie et le *payoff* est nul :



Tandis que l'acquisition d'un *strike lookback call* conduit à un *payoff* non nul :



L'utilité des *lookback* reste avant tout l'assurance de portefeuille. Par exemple, un *put price lookback* assure à chaque instant une valeur minimum du portefeuille et non plus seulement à l'échéance de l'option. En conséquence, elles sont surtout employées par les entreprises dont le résultat de leurs activités est étroitement lié au marché des changes.

## **CONCLUSION DE LA DEUXIEME PARTIE**

Dans cette deuxième partie, les principales techniques de gestion des options exotiques ont été abordées. Nous nous sommes tout d'abord attachés à montrer qu'en raison du caractère *path-dependent* de certaines options exotiques, le versement de dividendes aux actionnaires, entraîne un effet non négligeable sur la valeur des contrats. En outre, au travers de quelques exemples, il a été montré que l'incertitude relative au montant du dividende et à sa date de détachement a généralement des conséquences encore plus significatives sur le *premium* des contrats exotiques que sur celui des options vanilles.

La mesure de la volatilité historique est un indicateur permettant de définir le prix des options non cotées et de connaître la cherté des options cotées. En effet, si le marché des options négociables est suffisamment liquide, il est possible d'apprécier la valeur des options exotiques grâce au *smile* de volatilité extrait des prix des options négociables. En revanche si aucune indication n'est donnée par le marché sur la valeur de la volatilité implicite, seule la mesure de la volatilité historique permet de définir le prix d'une option exotique. Le deuxième chapitre a été consacré à cette étude. Il a été montré qu'à l'aide de modèles plus élaborés que celui de Black et Scholes, il était possible de donner une mesure de la volatilité historique dépendante du prix de l'action et de la maturité envisagée.

La durée de vie des options américaines et des options exotiques peut être incertaine. Nous avons établis, à l'aide d'un arbre binomial, une méthode permettant le calcul des probabilités de fin de vie de l'option, en une date donnée, et ce sans aucune autre restriction sur les hypothèses que celles formulées dans la méthode d'évaluation par arbre utilisée. Connaissant cet ensemble de probabilités, la durée de vie moyenne (duration) de l'option considérée est déduite sans difficulté.

## **CONCLUSION GENERALE**

Une grande variété d'options exotiques sur actions a pu être révélée dans cette thèse. Celles-ci peuvent être classées en cinq grandes catégories :

- les options à barrière ;
- les options à *payoff* complexe ;
- les options contingentes à plusieurs actifs risqués ;
- les options à échéance glissante ;
- les options conditionnées par un taux de change.

Les modèles numériques d'évaluation proposés dans la première partie permettent de calculer directement la valeur des options appartenant aux trois premières classes d'options mentionnées. Pour les deux autres groupes, quelques légères mais triviales modifications doivent être apportées. Il est par exemple nécessaire de créer un petit algorithme permettant de recalculer la valeur des options à échéances glissantes pour chaque nœud de l'arbre des prix de l'option. L'intégration de la dynamique d'un taux de change peut être réalisé soit par la modélisation séparée de l'action et du taux de change soit par la modélisation du produit action taux de change<sup>212</sup>.

\*       \*

\*

Nous avons orienté nos travaux de recherche sur l'évaluation des produits dérivés autour de deux techniques fondamentales.

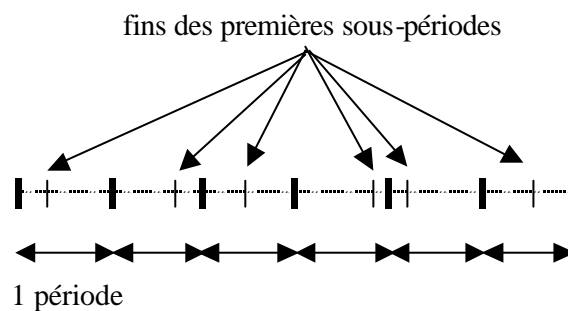
La première méthode est basée sur l'interpolation de l'arbre de prix de l'option. Cette démarche intuitive, dont la rigueur mathématique a toutefois été démontrée, permet notamment d'évaluer les options *path-independent* contingente à un ou deux actifs risqués à l'aide d'un arbre. En outre, elle nous a permis de mettre en évidence les problèmes de surévaluation ou de sous-évaluation des options à barrière. L'adaptation de la méthode que nous avons proposée résout ces problèmes et garantit le respect de la distribution mathématique du prix de l'option.

---

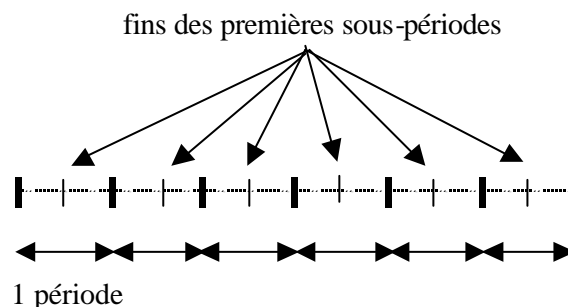
<sup>212</sup> Toft K. et Reiner E., "Currency-Translated Foreign Equity Options : The American Case", *Advances in Futures and Options Research*, 1997, Vol 9.

La seconde méthode repose sur un découpage de l'intervalle de gestion de l'option plus fin que celui défini dans les approches classiques. Selon cette technique, il est nécessaire d'opérer deux subdivisions du temps. La première correspond à celle des approches numériques traditionnelles. La durée de vie de l'option est divisée en plusieurs périodes de longueur identique. La seconde subdivision du temps que nous proposons s'effectue à l'intérieur de chacune des périodes pour aboutir à un ensemble de sous-périodes dont la longueur n'est plus forcément unique. Par exemple, pour les options à barrière, la longueur des sous-périodes dépend de chacune des périodes et des caractéristiques de l'option et de son action sous-jacente. Pour les options contingentes à plusieurs actifs risqués, les sous-périodes sont de la même durée quelles que soient les caractéristiques de l'option et des actions supports. Enfin, pour les options contingentes aux taux, deux sous-périodes sont créées à l'intérieur de chaque période, la seconde étant de durée infiniment courte. Le graphique suivant résume en l'illustrant le principe de décomposition du temps en fonction de l'option considérée :

- Dans le cas des options à barrière, la durée des sous-périodes n'est pas constante :

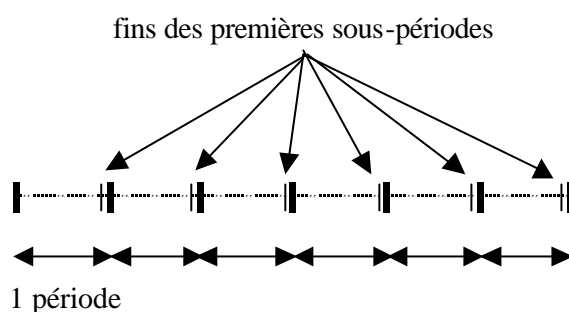


- Dans le cas des options contingentes à plusieurs actions, la durée des sous-périodes est unique :



(exemple en présence de deux actifs)

- Dans le cas des options contingentes aux taux, la durée de la seconde sous-période est infiniment courte :



Nous pensons que cette technique de décomposition du temps pourrait être appliquée dans le cadre de l'hypothèse d'une volatilité stochastique du rendement de l'action sous-jacente. Pour l'instant, cette généralisation n'a pu être réalisée parce que nos travaux actuels aboutissent à créer une corrélation stochastique entre le rendement de l'actif risqué et sa volatilité.

\*      \*

\*

L'incertitude concernant la date du versement des dividendes et leur montant a des conséquences plus importantes sur le *premium* des options exotiques que sur celui des options standard. Leur prise en compte ne peut s'effectuer en continu d'où l'utilité des méthodes numériques par rapport aux formules analytiques.

Les transactions sur les options exotiques s'effectuent sur le marché de gré à gré, supposé moins concurrentiel que les marchés organisés. En raison de l'absence de teneur de marché et de la non cotation des produits, la volatilité historique des rendements joue un rôle plus déterminant dans l'évaluation que dans le cas des options du MONEP. Nous nous sommes attachés à étudier les procédés permettant la mesure de la volatilité historique. Le principe des cônes de volatilité a été étendu et nous avons proposé de le corriger en fonction de modèles plus élaborés que celui de Black et Scholes. Cette modification permet de déduire ce que nous avons appelé un *smile* de volatilité historique implicite.

Enfin, l'étude des options exotiques se termine par quelques propositions de techniques de gestion avancées. L'une des principales difficultés résultant de l'achat des options américaines et exotiques est le calcul de la durée de vie moyenne et des probabilités d'exercice anticipé. Nous avons montré comment estimer ces valeurs à l'aide d'un arbre

binomial. La connaissance de celles-ci permet aux gestionnaires de mieux maîtriser la couverture ou la spéculation qu'il met en œuvre.

\* \*

\*

La littérature sur les options exotiques est extrêmement riche. Dans cette thèse, nous ne l'avons sans doute pas abordée dans sa globalité. Nous espérons toutefois, que notre travail permettra de faire mieux connaître les techniques fondamentales d'évaluation et de gestion des options exotiques sur actions.



## **Annexes**

## § 1 - Annexe 1 : Les principales formules fermées d'évaluation d'option

### A - Approximations de la loi normale

#### a. Approximation de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

$$N(x) = \begin{cases} 1 - f(x)(ak + bk^2 + ck^3 + dk^4 + ek^5) & \text{si } x \geq 0 \\ 1 - N(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

avec,

$$f(x), \text{ la densité de la loi normale centrée réduite : } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2p}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$k = \frac{1}{1 + px} \quad p = 0.2316419$$

$$a = 0.319381530 \quad b = -0.356563782 \quad c = 1.781477937$$

$$d = -1.821255978 \quad e = 1.330274429$$

#### b. Approximation de Drezner de la fonction de répartition de la loi normale bivariée

Soit  $N_2(a;b;p)$ , la fonction de la répartition de la loi normale bivariée. En 1978, Drezner en propose une approximation.

Il est nécessaire de différencier trois cas :

1 - 1<sup>er</sup> cas :  $a \leq 0$ ,  $b \leq 0$  et  $p \leq 0$

$$A_1 = 0.3253030 \quad A_2 = 0.4211071 \quad A_3 = 0.1334425 \quad A_4 = 0.006374323$$

$$B_1 = 0.1337764 \quad B_2 = 0.6243247 \quad B_3 = 1.3425378 \quad B_4 = 2.2626645$$

$$a' = \frac{a}{\sqrt{2(1-r^2)}} \quad b' = \frac{b}{\sqrt{2(1-r^2)}}$$

$$f(x, y) = \exp[a'(2x - a') + b'(2y - b') + 2r(x - a')(y - b')]$$

$$N_2(a; b; r) = \frac{\sqrt{1-r^2}}{p} \sum_{i,j=1}^4 A_i A_j f(B_i, B_j)$$

2 - 2<sup>ème</sup> cas :  $abp \leq 0$  sauf  $a \leq 0$ ,  $b \leq 0$  et  $p \leq 0$

$$N_2(a; -b; -r) = N(a) - N_2(a; b; r)$$

$$N_2(-a; b; -r) = N(b) - N_2(a; b; r)$$

$$N_2(-a; -b; r) = 1 - N(a) - N(b) + N_2(a; b; r)$$

3 - 3<sup>ème</sup> cas :  $ab\rho > 0$

$$r_1 = \frac{(ra - b)e(a)}{\sqrt{a^2 - 2abr + b^2}}$$

$$r_2 = \frac{(rb - a)e(b)}{\sqrt{a^2 - 2abr + b^2}}$$

$$k = \frac{1 - e(a)e(b)}{4}$$

$$e(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$N_2(a; b; \mathbf{r}) = N_2(a; 0; \mathbf{r}_1) + N_2(b; 0; \mathbf{r}_2) - k$$

$$\frac{dS}{S} = \mathbf{m}dt + \mathbf{s}(t)dZ(t)$$

B - Options vanilles

a. La formule de Black et Scholes

Le prix d'une option européenne sur un sous-jacent ne versant pas de dividende est donnée par :

- $call = SN(d_1) - Ke^{-rt}N(d_2)$
- $put = -SN(-d_1) + Ke^{-rt}N(-d_2)$

$$\text{avec } d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\mathbf{s}^2\right)t}{\mathbf{s}\sqrt{t}} \text{ et } d_2 = d_1 - \mathbf{s}\sqrt{t}$$

b. La formule de Merton

Merton suppose que les dynamiques du prix de l'action et du zéro-coupon sont représentées par deux mouvements browniens géométriques :

$$\frac{dS}{S} = \mathbf{m}dt + \mathbf{s}(t)dZ(t) \qquad \frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = \mathbf{a}(t)dt - \mathbf{d}(t)dZ'(t)$$

$$\text{avec } dZ(t).dZ'(t) = -k(t)dt.$$

Où :  $S$  désigne la valeur de l'action sous-jacente,  $t$  la date présente,  $P(t, T)$  le prix en  $t$  d'un zéro-coupon d'échéance  $T$  de maturité  $t = T - t$ ,  $\mathbf{m}$  et  $\mathbf{s}(t)$  la dérive et la volatilité instantanée du rendement de l'action,  $\mathbf{a}(t)$  et  $\mathbf{d}(t)$  la dérive et la volatilité instantanée du rendement du zéro coupon  $P(t, T)$ ,  $k(t)$  le coefficient de corrélation instantané entre les

rendements non anticipés de  $S$  et de  $P(t, T)$ ,  $Z(t)$  et  $Z'(t)$  deux processus de Wiener standards sous la probabilité réelle.

$\mathbf{s}(t)$ ,  $\mathbf{d}(T - t)$ ,  $k(t)$  sont des fonctions déterministes de  $t$ .

La formule d'évaluation d'une option européenne sur actions, proposée par Merton (1973), s'écrit :

$$\left. \begin{aligned} C &= S(t)N(d_1) - KP(t, T)N(d_2) \\ \text{avec} \quad d_1 &= \frac{\text{Log} \frac{S(t)}{KP(t, T)} + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{s}}^2 t}{\hat{\mathbf{s}} \sqrt{t}}, d_2 = d_1 - \hat{\mathbf{s}} \sqrt{t} \\ \text{et} \quad \hat{\mathbf{s}}^2 &= \frac{1}{t} \int_t^T (\mathbf{s}^2(u) + \mathbf{d}^2(u)(t-u)^2 - 2k(u)\mathbf{s}(u)\mathbf{d}(u)(t-u)) du \end{aligned} \right\}$$

où :  $K$  le prix d'exercice de l'option et  $N(.)$  la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

### c. La formule de Jarrow et Rudd

Nous présentons la formule de Jarrow et Rudd telle qu'énoncée par Corrado et Su :

$$C_{JR} = C_{BS} + \lambda_1 Q_3 + \lambda_2 Q_4$$

où  $C_{JR}$  est égal au prix du *call* selon la formule de Jarrow et Rudd,  $C_{BS}$  est égal au prix du *call* selon la formule de Black et Scholes,  $\lambda_1 = \gamma_1(D_{réelle}) - \gamma_1(D_{\log N})$ ,  $\lambda_2 = \gamma_2(D_{réelle}) - \gamma_2(D_{\log N})$ ,

$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}$  le coefficient d'asymétrie et  $\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3$  le coefficient d'aplatissement de Fisher,

tous deux calculés pour la distribution réelle  $D_{réelle}$ , où  $\mu_j$  est égal au  $j^{\text{ème}}$  moment centré, tandis que pour la distribution lognormale  $D_{\log N}$ , on a  $\gamma_1(D_{\log N}) = 3q + q^3$  et  $\gamma_2(D_{\log N}) = 16q^2 + 15q^4 + 6q^6 + q^8$  avec  $q^2 = e^{\sigma^2 t} - 1$ .

De plus,

- $a(S_t) = \frac{C_1 C_5}{S_t} \times \exp\{C_2 [\ln S_t]^2\} \times \exp\{C_4 \ln S_t\}$
- $\frac{\partial a(S_t)}{\partial S_t} = \frac{a(S_t)}{S_t} [2C_2 \ln(S_t) + C_4 - 1]$
- $\frac{\partial^2 a(S_t)}{\partial S_t^2} = \frac{\partial a(S_t)}{\partial S_t} \left[ \frac{\partial a(S_t)}{\partial S_t} \frac{1}{a(S_t)} - \frac{1}{S_t} \right] + 2C_2 \frac{a(S_t)}{S_t}$

$$\text{où } C_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} ; C_2 = \frac{-1}{2\sigma^2 t} ; C_3 = \ln(S_0 e^{rt}) - \frac{\sigma^2 t}{2} ; C_4 = -2C_2 C_3 \text{ et } C_5 = \exp(C_2 C_3^2).$$

## C - Options digitales

### a.l'actif ou rien

- $call = SN(d_1)$
- $put = SN(-d_1)$

$$\text{avec } d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

### b.l'option gap

- $call = SN(d_1) - Xe^{-rt} N(d_2)$
- $put = -SN(-d_1) + Xe^{-rt} N(-d_2)$

$$\text{avec } d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}{\sigma\sqrt{t}}, d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t} \text{ et } X-K \text{ la valeur du gap.}$$

### c.l'option cash ou rien

- $call = Re^{-rt} N(d_2)$
- $put = Re^{-rt} N(-d_2)$

$$\text{avec } d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}{\sigma\sqrt{t}} \text{ et } R \text{ la soulte éventuellement versée à l'échéance.}$$

### d.option binaire à barrière

L'ensemble des résultats suivants sont issus du working paper de Rubinstein et Reiner 1994.

Nous reprenons les mêmes notations que les auteurs :

$$[1A] = S N(\Phi_X)$$

$$[1C] = X e^{-r\tau} N(\Phi_X - \Phi\sigma\sqrt{\tau})$$

$$[2A] = S N(\Phi_{X_1})$$

$$[2C] = X e^{-r\tau} N(\Phi_{X_1} - \Phi\sigma\sqrt{\tau})$$

$$[3A] = S (H/S)^{2\lambda} N(\eta y)$$

$$[3C] = X e^{-r\tau} (H/S)^{2\lambda-2} N(\eta y - \eta\sigma\sqrt{\tau})$$

$$[4A] = S (H/S)^{2\lambda} N(\eta y_1)$$

$$[4C] = X e^{-r\tau} (H/S)^{2\lambda-2} N(\eta y_1 - \eta\sigma\sqrt{\tau})$$

$$[6] = X [ (H/S)^{a+b} N(\eta z) + (H/S)^{a-b} N(\eta z - 2\eta b\sigma\sqrt{\tau}) ]$$

où,

$$x = \ln(S/K) / (\sigma\sqrt{\tau}) + \lambda\sigma\sqrt{\tau}$$

$$x_1 = \ln(S/H) / (\sigma\sqrt{\tau}) + \lambda\sigma\sqrt{\tau}$$

$$y = \ln(H^2/(SK)) / (\sigma\sqrt{\tau}) + \lambda\sigma\sqrt{\tau}$$

$$y_1 = \ln(H/S) / (\sigma\sqrt{\tau}) + \lambda\sigma\sqrt{\tau}$$

$$z = \ln(H/S) / (\sigma\sqrt{\tau}) + b\sigma\sqrt{\tau}$$

$$a = \mu/\sigma^2$$

$$b = [\sqrt{(\mu^2 + 2\ln(r)\sigma^2)}]/\sigma^2$$

$$\lambda = 1 + a$$

H la valeur de la barrière

1 - down and in cash at hit or nothing

$$\{\eta = 1\} \quad \text{Prime} = [6]$$

2 - up and in cash at hit or nothing

$$\{\eta = -1\} \quad \text{Prime} = [6]$$

3 - down and in asset at hit or nothing

$$\{\eta = 1 ; X = H\} \quad \text{Prime} = [6]$$

4 - up and in asset at hit or nothing

$$\{\eta = -1 ; X = H\} \quad \text{Prime} = [6]$$

5 - down and in cash at expiry or nothing

$$\{\eta = 1 ; \Phi = -1\} \quad \text{Prime} = [2C] + [4C]$$

6 - up and in cash at expiry or nothing

$$\{\eta = -1 ; \Phi = 1\} \quad \text{Prime} = [2C] + [4C]$$

7 - down and in asset at expiry or nothing

$$\{\eta = 1 ; \Phi = -1\} \quad \text{Prime} = [2A] + [4A]$$

8 - up and in asset at expiry or nothing

$$\{\eta = -1 ; \Phi = 1\} \quad \text{Prime} = [2A] + [4A]$$

9 - down and out cash or nothing

$$\{\eta = 1; \Phi = 1\} \quad \text{Prime} = [2C] - [4C]$$

10 - up and out cash or nothing

$$\{\eta = -1; \Phi = -1\} \quad \text{Prime} = [2C] - [4C]$$

11 - down and out asset or nothing

$$\{\eta = 1; \Phi = 1\} \quad \text{Prime} = [2A] - [4A]$$

12 - up and out asset or nothing

$$\{\eta = -1; \Phi = -1\} \quad \text{Prime} = [2A] - [4A]$$

13 - down and in cash or nothing call

13.1 -  $K > H$

$$\{\eta = 1\} \quad \text{Prime} = [3C]$$

13.2 -  $K < H$

$$\{\eta = 1; \Phi = 1\} \quad \text{Prime} = [1C] - [2C] + [4C]$$

14 - up and in cash or nothing call

14.1 -  $K > H$

$$\{\Phi = 1\} \quad \text{Prime} = [1C]$$

14.2 -  $K < H$

$$\{\eta = -1; \Phi = 1\} \quad \text{Prime} = [2C] - [3C] + [4C]$$

15 - down and in asset or nothing call

15.1 -  $K > H$

$$\{\eta = 1\} \quad \text{Prime} = [3A]$$

15.2 -  $K < H$

$$\{\eta = 1; \Phi = 1\} \quad \text{Prime} = [1A] - [2A] + [4A]$$

16 - up and in asset or nothing call

16.1 -  $K > H$

$$\{\Phi = 1\} \quad \text{Prime} = [1A]$$

16.2 -  $K < H$ 

$$\{\eta = -1; \Phi = 1\} \quad \text{Prime} = [2A] - [3A] + [4A]$$

17 - down and in cash or nothing put

17.1 -  $K > H$ 

$$\{\eta = 1; \Phi = -1\} \quad \text{Prime} = [2C] - [3C] + [4C]$$

17.2 -  $K < H$ 

$$\{\Phi = -1\} \quad \text{Prime} = [1C]$$

18 - up and in cash or nothing put

18.1 -  $K > H$ 

$$\{\eta = -1; \Phi = -1\} \quad \text{Prime} = [1C] - [2C] + [4C]$$

18.2 -  $K < H$ 

$$\{\eta = -1\} \quad \text{Prime} = [3C]$$

19 - down and in asset or nothing put

19.1 -  $K > H$ 

$$\{\eta = 1; \Phi = -1\} \quad \text{Prime} = [2A] - [3A] + [4A]$$

19.2 -  $K < H$ 

$$\{\Phi = -1\} \quad \text{Prime} = [1A]$$

20 - up and in asset or nothing put

20.1 -  $K > H$ 

$$\{\eta = -1; \Phi = -1\} \quad \text{Prime} = [1A] - [2A] + [3A]$$

20.2 -  $K < H$ 

$$\{\eta = -1\} \quad \text{Prime} = [3A]$$

21 - down and out cash or nothing call

21.1 -  $K > H$ 

$$\{\eta = 1; \Phi = 1\} \quad \text{Prime} = [1C] - [3C]$$



21.2 -  $K < H$ 

$$\{\eta = 1; \Phi = 1\} \quad \text{Prime} = [2C] - [4C]$$

22 - *up and out cash or nothing call*

22.1 -  $K > H$ 

$$\text{Prime} = 0$$

22.2 -  $K < H$ 

$$\{\eta = -1; \Phi = 1\} \quad \text{Prime} = [1C] - [2C] + [3C] - [4C]$$

23 - *down and out asset or nothing call*

23.1 -  $K > H$ 

$$\{\eta = 1; \Phi = 1\} \quad \text{Prime} = [1A] - [3A]$$

23.2 -  $K < H$ 

$$\{\eta = 1; \Phi = 1\} \quad \text{Prime} = [2A] - [4A]$$

24 - *up and out asset or nothing call*

24.1 -  $K > H$ 

$$\text{Prime} = 0$$

24.2 -  $K < H$ 

$$\{\eta = -1; \Phi = 1\} \quad \text{Prime} = [1A] - [2A] + [3A] - [4A]$$

25 - *down and out cash or nothing put*

25.1 -  $K > H$ 

$$\{\eta = 1; \Phi = -1\} \quad \text{Prime} = [1C] - [2C] + [3C] - [4C]$$

25.2 -  $K < H$ 

$$\text{Prime} = 0$$

26 - *up and out cash or nothing put*

26.1 -  $K > H$ 

$$\{\eta = -1; \Phi = -1\} \quad \text{Prime} = [2C] - [4C]$$

26.2 -  $K < H$ 

$$\{\eta = -1; \Phi = -1\} \quad \text{Prime} = [1C] - [3C]$$

27 - *down and out asset or nothing put*

27.1 -  $K > H$ 

$$\{\eta = 1; \Phi = -1\} \quad \text{Prime} = [1A] - [2A] + [3A] - [4A]$$

27.2 -  $K < H$ 

$$\text{Prime} = 0$$

28 - *up and out asset or nothing put*

28.1 -  $K > H$ 

$$\{\eta = -1; \Phi = -1\} \quad \text{Prime} = [2A] - [4A]$$

28.2 -  $K < H$ 

$$\{\eta = -1; \Phi = -1\} \quad \text{Prime} = [1A] - [3A]$$

**D - Option à simple barrière**

L'ensemble des résultats suivants sont issus du working paper de Rubinstein et Reiner 1994. Le *rebate* R est donné au moment où la valeur de l'actif touche la barrière.

Nous reprenons les mêmes notations que les auteurs :

$$[1] = \Phi S N(\Phi x) - \Phi K e^{-r\tau} N(\Phi x - \Phi \sigma \sqrt{\tau})$$

$$[2] = \Phi S N(\Phi x_1) - \Phi K e^{-r\tau} N(\Phi x_1 - \Phi \sigma \sqrt{\tau})$$

$$[3] = \Phi S (H/S)^{2\lambda} N(\eta y) - \Phi K e^{-r\tau} (H/S)^{2\lambda-2} N(\eta y - \eta \sigma \sqrt{\tau})$$

$$[4] = \Phi S (H/S)^{2\lambda} N(\eta y_1) - \Phi K e^{-r\tau} (H/S)^{2\lambda-2} N(\eta y_1 - \eta \sigma \sqrt{\tau})$$

$$[5] = R e^{-r\tau} [N(\eta x_1 - \eta \sigma \sqrt{\tau}) - (H/S)^{2\lambda-2} N(\eta y_1 - \eta \sigma \sqrt{\tau})]$$

$$[6] = R [(H/S)^{a+b} N(\eta z) - (H/S)^{a-b} N(\eta z - 2\eta b \sigma \sqrt{\tau})]$$

où,

$$x = \ln(S/K) / (\sigma \sqrt{\tau}) + \lambda \sigma \sqrt{\tau}$$

$$x_1 = \ln(S/H) / (\sigma \sqrt{\tau}) + \lambda \sigma \sqrt{\tau}$$

$$y = \ln(H^2/(SK)) / (\sigma \sqrt{\tau}) + \lambda \sigma \sqrt{\tau}$$

$$y_1 = \ln(H/S) / (\sigma \sqrt{\tau}) + \lambda \sigma \sqrt{\tau}$$

$$z = \ln(H/S) / (\sigma \sqrt{\tau}) + b \sigma \sqrt{\tau}$$

$$a = \mu/\sigma^2$$

$$b = [\sqrt{(\mu^2 + 2\ln(r)\sigma^2)}]/\sigma^2$$

$$\lambda = 1 + a$$

H la valeur de la barrière

1 - down and in call

1.1 -  $K > H$

$$\{\eta = 1; \Phi = 1\} \quad \text{Prime} = [3] + [5]$$

1.2 -  $K < H$

$$\{\eta = 1; \Phi = 1\} \quad \text{Prime} = [1] - [2] + [4] + [5]$$

2 - up and in call

2.1 -  $K > H$

$$\{\eta = -1; \Phi = 1\} \quad \text{Prime} = [1] + [5]$$

2.2 -  $K < H$

$$\{\eta = -1; \Phi = 1\} \quad \text{Prime} = [2] - [3] + [4] + [5]$$

3 - down and in put

3.1 -  $K > H$

$$\{\eta = 1; \Phi = -1\} \quad \text{Prime} = [2] - [3] + [4] + [5]$$

3.2 -  $K < H$

$$\{\eta = 1; \Phi = -1\} \quad \text{Prime} = [1] + [5]$$

4 - up and in put

4.1 -  $K > H$

$$\{\eta = -1; \Phi = -1\} \quad \text{Prime} = [1] - [2] + [4] + [5]$$

4.2 -  $K < H$

$$\{\eta = -1; \Phi = -1\} \quad \text{Prime} = [3] + [5]$$

5 - down and out call

5.1 -  $K > H$

$$\{\eta = 1; \Phi = 1\} \quad \text{Prime} = [1] - [3] + [6]$$

5.2 -  $K < H$

$$\{\eta = 1; \Phi = 1\} \quad \text{Prime} = [2] - [4] + [6]$$

6 - *up and out call*

6.1 -  $K > H$

$$\{\eta = -1; \Phi = 1\} \quad \text{Prime} = [6]$$

6.2 -  $K < H$

$$\{\eta = -1; \Phi = 1\} \quad \text{Prime} = [1] - [2] + [3] - [4] + [6]$$

7 - *down and out put*

7.1 -  $K > H$

$$\{\eta = 1; \Phi = -1\} \quad \text{Prime} = [1] - [2] + [3] - [4] + [6]$$

7.2 -  $K < H$

$$\{\eta = 1; \Phi = -1\} \quad \text{Prime} = [6]$$

8 - *up and out put*

8.1 -  $K > H$

$$\{\eta = -1; \Phi = -1\} \quad \text{Prime} = [2] - [4] + [6]$$

8.2 -  $K < H$

$$\{\eta = -1; \Phi = -1\} \quad \text{Prime} = [1] - [3] + [6]$$

E - option lookforward

Soit  $S_{\min}$  le cours le plus bas de l'actif atteint durant la vie de l'option.

$$\bullet \quad call = SN(d_1) - S \frac{\mathbf{s}^2}{2r} N(-d_1) - S_{\min} e^{-rt} \left[ N(d_2) - \frac{\mathbf{s}^2}{2r} e^{c_1} N(-d_3) \right]$$

avec,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{S_{\min}}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\mathbf{s}^2\right)t}{\mathbf{s}\sqrt{t}} \quad d_2 = d_1 - \mathbf{s}\sqrt{t} \quad d_3 = \frac{\ln\left(\frac{S}{S_{\min}}\right) - \left(r - \frac{1}{2}\mathbf{s}^2\right)t}{\mathbf{s}\sqrt{t}}$$

$$c_1 = -\frac{2 \ln\left(\frac{S}{S_{\min}}\right) \left(r - \frac{1}{2} \mathbf{s}^2\right)}{\mathbf{s}^2}$$

Soit  $S_{\max}$  le cours le plus haut de l'actif atteint durant la vie de l'option.

$$\bullet \quad put = S_{\max} e^{-rt} \left[ N(d'_1) - \frac{\mathbf{s}^2}{2r} e^{c_2} N(-d'_3) \right] + S \frac{\mathbf{s}^2}{2r} N(-d'_2) - SN(d'_2)$$

avec,

$$d'_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_{\max}}{S}\right) + \left(-r + \frac{1}{2} \mathbf{s}^2\right)t}{\mathbf{s}\sqrt{t}} \quad d'_2 = d'_1 - \mathbf{s}\sqrt{t} \quad d'_3 = \frac{\ln\left(\frac{S_{\max}}{S}\right) + \left(r - \frac{1}{2} \mathbf{s}^2\right)t}{\mathbf{s}\sqrt{t}}$$

$$c_2 = \frac{2 \ln\left(\frac{S_{\max}}{S}\right) \left(r - \frac{1}{2} \mathbf{s}^2\right)}{\mathbf{s}^2}$$

## F - Option à plusieurs sous-jacents

### a. l'option d'échange

La formule de Margrabe d'une option d'échange est :

$$call = S_2 [1 - N(d_1)] + S_1 N(d_2)$$

$$\mathbf{s} = \sqrt{\mathbf{s}_1^2 + \mathbf{s}_2^2 - 2r\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2}$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_2}{S_1}\right) + \frac{1}{2} \mathbf{s}^2 t}{\mathbf{s}\sqrt{t}} \quad d_2 = d_1 - \mathbf{s}\sqrt{t}$$

### b. Option sur Maximum de deux actifs

La formule de Stulz est :

$$call = S_2 N_2(a_1; b_1; c_1) + S_1 N_2(a_2; b_2; c_2) - Ke^{-rt} N_2(a_3; b_3; \mathbf{r})$$

avec,

$$\bullet \quad a_1 = a_3 + \mathbf{s}_2 \sqrt{t} \quad \bullet \quad a_2 = b_3 + \mathbf{s}_1 \sqrt{t}$$

$$\bullet \quad a_3 = \frac{\ln\left(\frac{S_2}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2} \mathbf{s}_2^2\right)t}{\mathbf{s}_2 \sqrt{t}}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad b_1 &= \frac{\ln\left(\frac{S_1}{S_2}\right) - \frac{1}{2} \sigma^2 t}{\sigma \sqrt{t}} & \bullet \quad b_2 &= \frac{\ln\left(\frac{S_2}{S_1}\right) - \frac{1}{2} \sigma^2 t}{\sigma \sqrt{t}} \\
 \bullet \quad b_3 &= \frac{\ln\left(\frac{S_1}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2\right) t}{\sigma_1 \sqrt{t}} & \bullet \quad c_2 &= \frac{r S_2 - S_1}{\sigma} \\
 \bullet \quad c_1 &= \frac{r S_1 - S_2}{\sigma}
 \end{aligned}$$

*c. Option sur Minimum de deux actifs*

$$call = C_{BS-Actif S_1} + C_{BS-Actif S_2} - C_{MaximumDeux Actifs}$$

## § 2 - Annexe 2 - Evaluation des obligations indexées sur action

Afin de réduire la charge d'intérêts de ses emprunts, une entreprise peut émettre des obligations assorties d'une ou plusieurs clauses optionnelles. La partie obligataire du titre garantit, en cas de non faillite, un seuil de rentabilité minimale pour le prêteur, tandis que la ou les clauses optionnelles permettent d'accroître la performance du produit financier en cas d'évolution favorable des actions de l'émetteur.

Ces produits dérivés hybrides prennent des formes variées. Ils peuvent cependant se répartir en deux grandes familles. La première regroupe les émissions de titres dont la conversion (obligations convertibles) ou l'exercice (obligations assorties de bons de souscription) permet à l'investisseur d'obtenir un nouveau titre émis par l'émetteur. La seconde comprend les obligations dont la valeur finale dépend d'un index pouvant être représenté par la valeur des actions de l'émetteur, par celle un indice boursier, par l'inflation ou par toute autre variable macro ou micro économique.

Cet article est consacré spécifiquement aux obligations indexées sur action (OIA) qui connaissent actuellement un certain engouement auprès des émetteurs. Il s'agit d'obligation zéro-coupon dont la valeur de remboursement finale correspond à la valeur faciale du titre augmentée d'une prime qui est versée au souscripteur lorsque, durant la durée de vie de

l'emprunt, le rendement de l'action de l'émetteur est positif. Lorsque ce rendement est nul ou négatif, la prime est nulle mais l'investisseur est assuré de recevoir un remboursement minimal dès lors que l'entreprise émettrice n'est pas en situation de faillite. La prime versée ne peut toutefois dépasser un certain plafond fixé lors de l'émission. Le rendement de l'action servant de base à l'indexation est calculé à partir de la moyenne des cours observés respectivement sur une période inférieure à un mois précédant l'émission et sur une période équivalente située à la fin de la vie de l'emprunt.. Un délai d'un mois est souvent prévu entre la date de calcul du prix de remboursement et la date effective de remboursement.

A l'instar des obligations convertibles, ces titres sont sensibles à la fois à la volatilité du cours de l'actif sous-jacent et à la déformation de la courbe des taux d'intérêt durant leur durée de vie. Dans le cas des obligations convertibles, deux procédés généraux d'évaluation sont proposés : celui basé sur la valeur de l'action et celui basé sur la valeur de la firme. La prise en compte de la valeur de la firme s'avère plus adaptée aux particularités des convertibles. Dans le cas des obligations indexées, ce choix n'est plus aussi pertinent et la décomposition de ces titres en deux produits financiers indépendants est préférable.

En effet, les particularités du produit simplifient le problème d'évaluation puisqu'il est possible de le décomposer en deux titres indépendants, une obligation sans coupon exposée au risque de défaut de l'émetteur et un *call capé* dont l'exposition au risque de défaut peut être considéré comme négligeable.

L'annexe est ordonnée de la façon suivante : la première partie justifie le principe de décomposition d'une OIA. La deuxième propose d'évaluer ces actifs selon trois procédés différents ; le premier modèle utilise à la fois le modèle discret de Cox, Ross et Rubinstein (CRR - 1979) et la méthode de simulation stochastique de Monte Carlo. Le deuxième modèle suppose que la volatilité est définie par un processus stochastique. Le troisième modèle est basé sur les hypothèses du modèle de Merton (1974) en présence de taux stochastiques. Enfin, dans une dernière partie, des simulations sont réalisées afin de comparer les résultats obtenus à partir de ces trois modèles.

#### A - Principe de décomposition de l'OIA

Le prix de remboursement contractuel d'une OIA est égal au maximum des deux montants suivants :

- $Nominal \times 100\%$
- $Nominal \times \left[ 100\% + x\% \times \left( \frac{b_{MF} S_{MF} - b_{MI,1} S_{MI}}{b_{MI,2} S_{MI}} \right) \right]$

Où :

$S_{MI}$  désigne la moyenne des cours de l'action constatée sur une période de quelques jours située environ un mois avant l'émission.

et  $S_{MF}$  la moyenne des cours de l'action constatée sur une période de l'ordre de 15 jours située environ un mois avant la date  $T_R$  de remboursement. On désigne par  $T_1$  et  $T_2$ , (avec  $T_1 < T_2 < T_R$ ) les dates définissant la période de calcul du prix moyen final de l'action.

$x$  et  $b^*$  sont des coefficients pondérateurs prédéterminés lors de l'émission du titre.

- Le remboursement maximum est cependant limité à  $(100+y)\%$  de la valeur du nominal.

La fonction *payoff* d'une *OIA* s'écrit donc formellement :

$$Payoff = Nominal \times a \times 100\% + Nominal \times MAX \left\{ MIN \left\{ y\%; x\% \times \frac{b_{MF} S_{MF} - b_{MI,1} S_{MI}}{b_{MI,2} S_{MI}} \right\}; 0 \right\}$$

où  $a$  désigne un coefficient compris entre 0 et 1. Celui ci est égal à 1 en l'absence de défaillance de l'émetteur à l'échéance de l'emprunt. Il est en revanche strictement inférieur à 1 lorsque l'émetteur n'est pas en mesure de respecter ses engagements.

Afin d'alléger les écritures, on supposera par la suite que tous les coefficients  $b_{..}$  sont égaux à 1.

Comme le montre le tableau ci-dessous représentant les flux à l'échéance d'une *OIA*, la valeur de l'obligation, à une date  $t$  quelconque, peut s'exprimer comme la somme de deux éléments représentés par :

- une obligation zéro-coupon, d'échéance  $T_R$ , dont le prix de remboursement contractuel est égal à la valeur nominale de l'obligation ;
- et par la fraction d'un *call cappé*, correspondant à la différence entre deux *calls* européens. Soit :

$$OIA = Nominal \times B(t, T_R) + x\% \frac{Nominal}{S_{MI}} [C_1 - C_2]$$

où  $B(t, T_R)$  représente la valeur en  $t$  d'une obligation zéro-coupon risquée, d'échéance  $T_R$ , dont le prix de remboursement contractuel est égal à une unité monétaire,

et où  $C_1 = C(S_{MF}, T_R, S_{MI})$  et  $C_2 = C(S_{MF}, T_R, K_{SUP})$  désignent deux *calls* européens, d'échéance  $T_R$  et dont le *payoff* terminal est égal à la différence entre  $S_{MF}$  et un prix d'exercice

égal respectivement à  $S_{MI}$  et  $K_{SUP}$  avec  $K_{SUP} = \left(1 + \frac{y}{x}\right) S_{MI}$ .



Valeur en t	Valeur en $T_R$		
	I	II	III
	$S_{MF} < S_{MI}$	$S_{MI} < S_{MF} < K_{SUP}$	$K_{SUP} < S_{MF}$
$Nominal \times B(t, T_R)$	$nominal \times a$	$nominal$	$nominal$
$x\% \frac{nominal}{S_{MI}} (C_1 - C_2)$	0	$\frac{nominal}{S_{MI}} (S_{MF} - S_{MI})$	$\frac{nominal}{S_{MI}} (K_{SUP} - S_{MI})$
$OIA$	$nominal \times a$	$nominal \left[ 1 + x\% \frac{S_{MF} - S_{MI}}{S_{MI}} \right]$	$nominal (1 + y\%)$

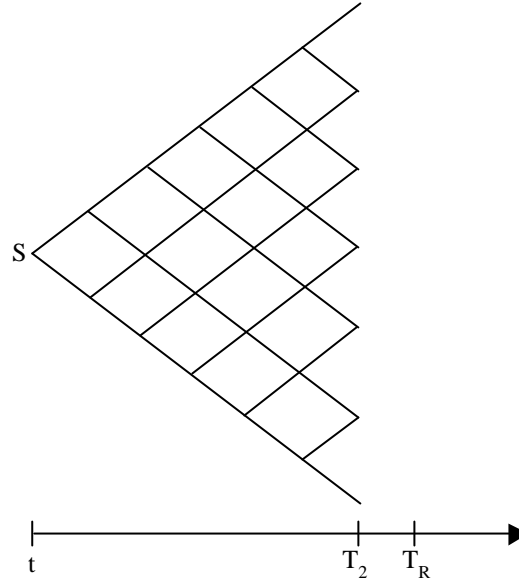
L'existence d'un risque de défaillance de l'émetteur lors du remboursement de l'OIA fait que l'obligation zéro-coupon  $B(t, T_R)$  est risquée. La défaillance de l'émetteur au moment du remboursement de l'OIA entraîne en principe une baisse du cours de ses actions ayant pour effet d'annuler la valeur des deux *calls* (colonne I du tableau précédent). Le souscripteur ne reçoit alors aucune prime. *A contrario*, lorsque le rendement de l'action est positif durant la vie de l'emprunt (colonne II et III), on peut raisonnablement admettre que la situation financière de l'entreprise est suffisamment satisfaisante pour permettre le remboursement complet des obligations sans coupon et le paiement des primes dues aux souscripteurs. En conséquence, l'OIA peut être utilement décomposée en une obligation risquée (communément appelée la valeur nue) et un *call capé* non exposé au risque de défaut de l'émetteur:

La valeur nue peut être assez facilement évaluée en majorant son taux actuariel d'un *spread*, ou écart de taux par rapport à une obligation équivalente, de même maturité, mais sans risque. Aussi, la suite de l'exposé traitera plus spécifiquement de l'évaluation du second terme composant l'OIA.

## B - Les modèles d'évaluation

### a. Le modèle binomial

L'arbre d'évolution des prix ne doit pas être développé jusqu'à la date de remboursement de l'emprunt mais jusqu'à la date  $T_2$  de calcul du prix moyen de l'actif  $S_{MF}$  :



où  $t$  est une date inférieure à  $T_1$ .

En l'absence d'opportunité d'arbitrage, le *payoff* perçu équivalent à la date  $T_2$  correspond au remboursement actualisé<sup>213</sup> versé en  $T_R$ .

<sup>213</sup> Sous ces hypothèses, la formule fermée d'évaluation du *call* cappé est facilement obtenue. Afin d'alléger les écritures, on suppose d'une part l'absence de versement de dividendes (cash et continu) et d'autre part que tous les coefficients  $\mathbf{b}_{i,j}$  sont égaux à 1.

Il vient après calculs :

$$\frac{\text{Call cappé}}{\text{Nominal}(T_2)} = e^{-rt} \{y\% N(d_1) + x\% [N(d_1) - N(d_3)]\} + \frac{S}{S_{MI}} x\% \{N(d_4) - N(d_2)\}$$

avec,

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{K_{SUP}} + \left(r - \frac{1}{2} s^2\right) t}{s \sqrt{t}}$$

$$d_2 = d_1 + s \sqrt{t}$$

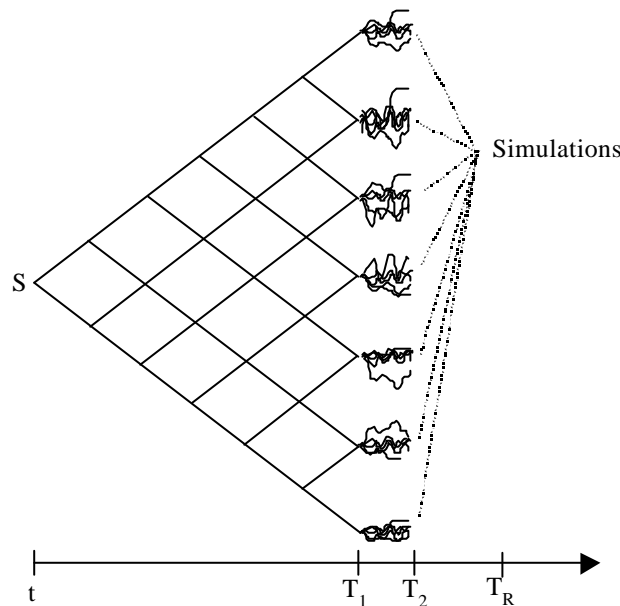
$$d_3 = \frac{\ln \frac{S}{S_{MI}} + \left(r - \frac{1}{2} s^2\right) t}{s \sqrt{t}}$$

$$d_4 = d_3 + s \sqrt{t}$$

où  $K_{SUP} = \left(\frac{y\%}{x\%} + 1\right) \times S_{MI}$ ,  $\text{Nominal}(T_2)$  correspond à la valeur du nominal actualisée à la date  $T_2$  et où  $N(\cdot)$  désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Les OIA présentent une maturité suffisamment importante pour qu'il soit en général impossible de calculer en  $T_2$  le prix moyen final de l'action. Par analogie à d'autres procédés d'évaluation, le prix moyen  $S_{MF}$  est identifié à la valeur ponctuelle de l'action en  $T_2$ . Faire correspondre la valeur ponctuelle de l'action en  $T_2$  à son cours moyen n'est pas réfutable lorsque la date  $t$  d'évaluation est suffisamment éloignée de la date  $T_2$ . Lorsque ce n'est pas le cas, la durée des périodes de discrétisation peut être raccourcie de sorte à ce que le calcul de la moyenne  $S_{MF}$  soit possible<sup>214</sup>.

Il est possible de combiner les approches par arborescence et de simulations<sup>215</sup> afin de calculer les différentes valeurs moyennes finales  $S_{MF}$ . Dans ce dernier cas, il suffit de développer l'arbre des prix de  $S$  entre les dates  $t$  et  $T_1$ , puis de simuler pour chaque valeur finale les trajectoires de  $S$  entre  $T_1$  et  $T_2$ , d'en déduire les différentes valeurs  $S_{MF}$  pour chaque valeur finale de l'arbre des prix et de reporter le *payoff* actualisé du versement correspondant à la date  $T_1$  :



<sup>214</sup> Lorsque la date  $t$  est proche de la date  $T_2$ , un nombre de périodes au moins égal à la différence de nombre de jours séparant les dates  $t$  et  $T_2$  peut être choisi de sorte à ce que la moyenne  $S_{MF}$  puisse être calculée au sein de l'arbre.

<sup>215</sup> La méthode des simulations de browniens initiées par Boyle en 1977, revient dans ce cas à simuler pour chaque valeur finale de l'arbre les trajectoires du prix de l'action entre les dates  $T_1$  et  $T_2$ . A l'aide du lemme d'Itô et après intégration, on montre que pour deux dates  $t_1$  et  $t_2$ ,

$$S(t_2) = S(t_1) \exp \left[ \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t_2 - t_1) + \sigma (\hat{Z}(t_2) - \hat{Z}(t_1)) \right]. \text{ Il ne reste plus qu'à simuler les valeurs de } \hat{Z} \text{ selon}$$

une loi normale  $N(0, \sqrt{(t_2 - t_1)})$  pour en déduire les trajectoires discrètes de  $S$  et la moyenne  $S_{MF}$ . Dans ce but, la génération de variables aléatoires antithétiques par la technique du rejet polaire est l'une des plus efficaces.

La méthode présentée peut être adaptée sans aucune difficulté aux autres méthodes numériques d'évaluation. Il en est de même en ce qui concerne la prise en compte éventuelle d'une surface de volatilité par prix d'exercice et par maturité<sup>216</sup> ou d'une fourchette de volatilité selon le principe d'Avellaneda, Levy et Parás.

### ***b. Le modèle à taux stochastique***

De nouveau, et sous l'hypothèse que la valeur du nominal actualisée à la date  $T_2$  est toujours égale à sa valeur actuelle espérée - ce qui est le cas si  $T_2 = T_R$  -, une formule fermée d'évaluation du *call* cappé plus générale que la première peut être obtenue après passage dans l'univers *forward*-neutre  $Q_{T_2}$ . A l'instar de l'évaluation analytique précédente, on suppose d'une part l'absence de versement de dividendes (cash et continu) et d'autre part que tous les coefficients  $b_{...}$  sont égaux à 1.

Il vient après calculs :

$$\frac{\text{Call cappé}}{\text{Nominal}(T_2)} = B(t, T_2) \left\{ y\% N(d'_1) + x\% [N(d'_1) - N(d'_3)] \right\} + \frac{S}{S_{MI}} x\% \{ N(d'_4) - N(d'_2) \}$$

avec,

$$d'_1 = \frac{\ln \frac{F(t, T_2)}{K_{SUP}} - \frac{1}{2} \hat{S}^2 t}{\hat{S} \sqrt{t}} \quad d'_2 = d'_1 + \hat{S} \sqrt{t}$$

$$d'_3 = \frac{\ln \frac{F(t, T_2)}{S_{MI}} - \frac{1}{2} \hat{S}^2 t}{\hat{S} \sqrt{t}} \quad d'_4 = d'_3 + \hat{S} \sqrt{t}$$

où l'on rappelle que  $K_{SUP} = \left( \frac{y\%}{x\%} + 1 \right) \times S_{MI}$ ,  $F(t, T_2)$  le prix *forward* d'échéance  $T_2$  du prix de l'action vu en  $t$  et où  $\text{Nominal}(T_2)$  correspond à la valeur espérée en  $t$  du nominal versé en  $T_R$  et actualisée à la date  $T_2$ .

### ***c. Le modèle à volatilité stochastique***

Le *call* cappé inclus dans l'OIA dépend du rendement du cours du sous-jacent calculés sur deux périodes différentes. Les études économétriques tendent à prouver que le paramètre de la volatilité est proche d'un processus de diffusion. L'hypothèse d'une volatilité du rendement constante peut donc sembler trop restrictive.

Le processus de diffusion de la volatilité choisi par Hull et White en 1987 ne permet pas toujours de retrouver les nappes de volatilités constatées sur le marché. Le choix d'un

<sup>216</sup> Cf Derman et Kani, 1998.

processus de retour à la moyenne (*mean-reverting*) semble s'avérer plus adéquat. En 1993, Heston propose une telle configuration avec le processus racine-carré pour la variance du rendement :

$$dS = fSdt + sSdW$$

$$dV = k[q - V]dt + \mathbf{x}\sqrt{V}dZ$$

où W et Z sont deux processus de Wiener de corrélation instantanée  $\mathbf{r}$ dt.

Les valeurs des processus de S et de V aux dates  $t_{i+1}$ ,  $i \in \{0, \dots, N-1\}$ , s'obtiennent à partir des formules suivantes :

$$S_{i+1} = S_i \exp \left[ \left( r(t_i, t_{i+1}) - \frac{1}{2}V_i \right) (t_{i+1} - t_i) + \mathbf{e}_i \sqrt{V_i (t_{i+1} - t_i)} \right]$$

$$V_{i+1} = V_i + k[q - V_i](t_{i+1} - t_i) + \mathbf{e}_i' \mathbf{x} \sqrt{V_i (t_{i+1} - t_i)}$$

où  $\forall i \in \{0, \dots, N-1\}$ ,  $\mathbf{e}_i$  et  $\mathbf{e}_i'$  sont des variables aléatoires distribuées selon deux lois normales centrées réduites de corrélation<sup>217</sup>  $\mathbf{r}$ .

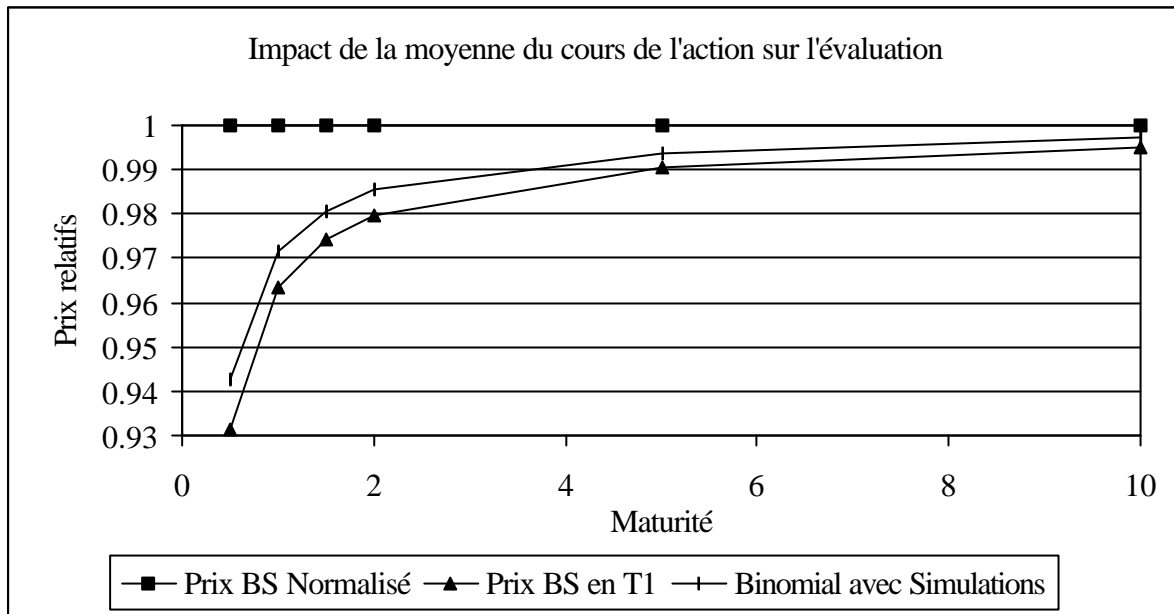
La vitesse de convergence des méthodes de simulation dépend essentiellement des techniques mises en œuvre dans l'élaboration des variables aléatoires. Afin de favoriser les temps de calculs les procédés quasi-aléatoire du type *Low-Discrepancy* sont souvent programmés<sup>218</sup>.

### C - Comparaisons et interprétations des résultats numériques

Nous avons mis en œuvre la méthode binomiale accouplée à la méthode des simulations décrite à la section I-B-2 pour différentes maturités. Afin de pouvoir comparer les résultats avec les formules fermées faisant intervenir un paiement en  $T_1$  et en  $T_2$ , les prix obtenus ont été normalisés par le résultat obtenu à l'aide de la formule analytique avec un paiement en  $T_2$ , ils sont appelés prix BS. Les dates  $T_2$  et  $T_R$  sont supposées identiques.

<sup>217</sup> A l'aide du principe de décomposition des browniens, il est possible de séparer l'un des browniens, par exemple Z, en deux browniens orthogonaux dont un parfaitement corrélé avec le brownien W.

<sup>218</sup> L'une des méthodes de simulations les plus adaptées au cas envisagé est celle de Sobol, Cf Jung, 1998.

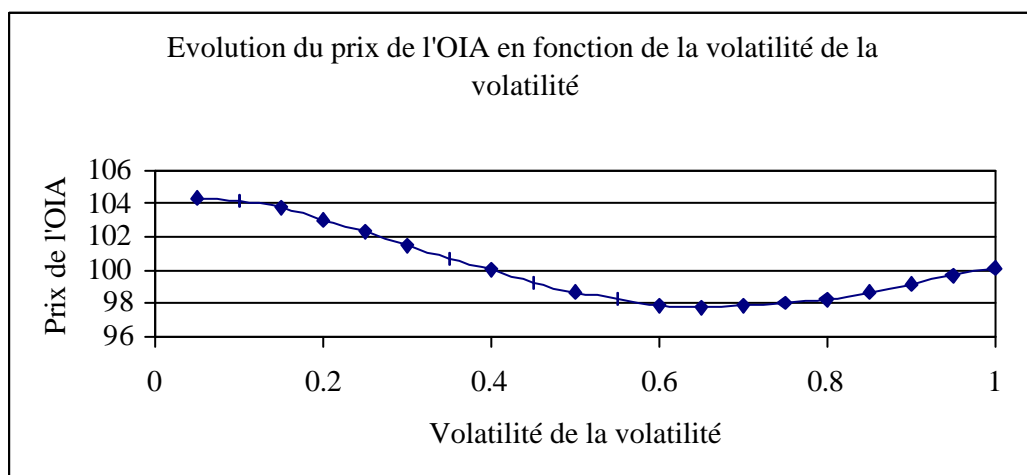


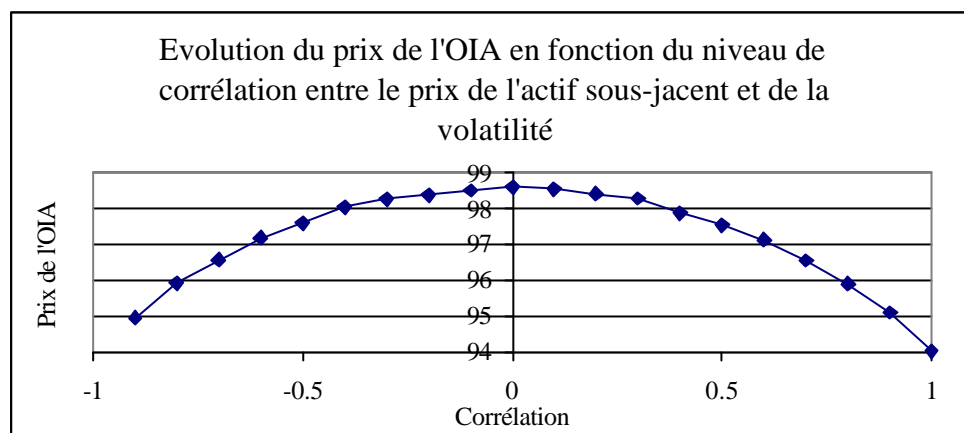
Données initiales :  $S = 100$  ;  $S_{M1} = 100$  ;  $\sigma = 20\%$  ;  $r = 5\%$  ;  $x = 100\%$  ;  $y = 300\%$  ;

Nominal( $T_2$ ) = 1000 ; Nombre de jours entre  $T_1$  et  $T_2 = 20$ .

Pour l'exemple considéré, ce graphique révèle que les prix calculés à l'aide de la méthode binomiale conjointe à la méthode des simulations s'avèrent être plus proches de ceux obtenus par la formule du type BS avec un paiement en  $T_1$ . L'incidence assez forte pour de faibles maturités tend à être réduite avec l'allongement de cette dernière.

Dans ces conditions, l'obtention d'un prix inférieur est conforme à nos attentes puisque le prix d'un *call* sur moyenne est nettement inférieur à celui du *call* vanille comparable. Dans d'autres conditions, les prix calculés avec la méthode hybride et avec la formule analytique avec paiement en  $T_1$  peuvent être supérieur au prix BS avec un paiement intervenant en  $T_2$ .





## **TABLE DES MATIERES**

<b><u>INTRODUCTION GENERALE .....</u></b>	<b><u>7</u></b>
---	-----------------

<b><u>PARTIE PRELIMINAIRE : PRESENTATION DES OPTIONS EXOTIQUES.....</u></b>	<b><u>14</u></b>
---	------------------

SECTION 1. LES OPTIONS A BARRIERE.....	17
§ 1 - Barrière désactivante .....	18
§ 2 - Barrière activante .....	22
§ 3 - Barrière partielle.....	25
§ 4 - Barrière discrète .....	26
§ 5 - Double barrière .....	27
A - Barrières du même type.....	27
a. Double knock out .....	27
b. Double knock in .....	28
B - Barrières à effet opposé .....	28
a. Roll Option.....	28
b. Successive touch.....	28
§ 6 - Barrière contingente .....	29
§ 7 - Barrière et <i>rebate</i> .....	30
§ 8 - Barrière douce ( <i>soft barrier</i> ).....	31
§ 9 - Echelle ( <i>Ladder – lock step</i> ).....	31
§ 10 - <i>Touch option</i> .....	32
A - <i>Instant touch</i> .....	32
B - <i>Baseball (3-touch)</i> .....	32
§ 11 - Parisiennes.....	32
§ 12 - <i>Switch - Corridor</i> .....	32
§ 13 - Option à prix d'exercice conditionné par une barrière .....	33
SECTION 2. LES OPTIONS A <i>PAYOFF</i> COMPLEXE.....	33
§ 1 - Option composée.....	33
§ 2 - <i>Instalment option</i> .....	33
§ 3 - <i>Chooser</i> .....	34
§ 4 - <i>Les options lookback</i> .....	34



<i>A - Price lookback (lookforward – insight option)</i> .....	34
<i>B - Strike lookback</i> .....	34
<i>C - High-low</i> .....	35
<i>D - Lookback à excursion</i> .....	35
<i>E - Cliquet - verrou</i> .....	35
a. Option à cliquet.....	35
b. Option à verrou .....	36
<i>F - Shoutfloor</i> .....	36
<i>G - Option sur performance</i> .....	37
§ 5 - Les options sur moyenne – asiatique .....	38
A - Prix moyen ( <i>price asian option</i> ).....	38
B - Prix d'exercice moyen ( <i>strike asian option</i> ).....	39
§ 6 - Les options digitales .....	40
A - <i>Cash or nothing</i> .....	40
B - <i>gap</i> .....	40
C - <i>Asset or nothing</i> .....	41
D - Prime contingente .....	42
SECTION 3. LES OPTIONS CONTINGENTES A PLUSIEURS ACTIFS RISQUES .....	43
§ 1 - <i>Outperformance</i> .....	43
A - Echange .....	43
B - <i>Best of, Worst of</i> .....	44
§ 2 - <i>Multi-strike</i> .....	44
§ 3 - Maximum – Minimum .....	45
§ 4 - Option sur écart ( <i>spread option</i> ).....	46
§ 5 - Panier ( <i>basket</i> ) .....	47
§ 6 - Option sur produit et sur quotient .....	48
A - Option sur produit .....	48
B - Option sur quotient .....	49
SECTION 4. LES OPTIONS A ECHEANCE GLISSANTE.....	50
SECTION 5. LES OPTIONS CONDITIONNEES PAR UN TAUX DE CHANGE.....	51
§ 1 - Option sur indice étranger.....	51
§ 2 - Option sur actif avec exposition inverse sur la devise.....	52
§ 3 - <i>Quanto</i> .....	52
§ 4 - <i>Compo</i> .....	53
§ 5 - <i>Dual currency</i> .....	54

**PREMIERE PARTIE : EVALUATION DES OPTIONS EXOTIQUES SUR ACTIONS..... 56****CHAPITRE 1.EVALUATION EN PRESENCE DE TAUX DETERMINIS TES ET DE VOLATILITES****CONSTANTES ..... 59****SECTION 1. RAPPELS ET COMPLEMENTS SUR LES METHODES DISCRETES .....61****§ 1 - Les méthodes par arbre.....62****A - Les modèles binomiaux.....62****a. Le modèle de Cox, Ross et Rubinstein .....62****b. Le modèle de Jarrow et Rudd.....64****c. Le modèle par interpolation linéaire.....65****1 - Les hypothèses du modèle .....65****2 - Evaluation de l'option .....66****2.1 - Estimation des coefficients de la droite.....67****2.2 - Evaluation de l'option.....67****3 - Le modèle binomial classique adapté.....68****3.1 - Présentation du modèle .....68****3.2 - Convergence du modèle binomial classique adapté .....68****4 - Comparaison des deux modèles binomiaux .....70****5 - Résultats numériques.....70****B - Les modèles trinomiaux .....71****a. Le modèle de Boyle .....71****b. Equivalence entre les modèles de Boyle et de CRR .....73****c. Extensions du modèle de Boyle, l'apport de Tian .....75****d. Inversion du système de probabilité .....76****e. Le modèle par interpolation parabolique .....77****1 - Schéma d'évolution du prix du sous-jacent .....78****1.1 - L'induction arrière .....78****1.2 - Estimation des coefficients de la parabole .....79****2 - Le modèle trinomial classique adapté .....80****2.1 - Présentation du modèle .....80****2.2 - Convergence du modèle trinomial adapté .....80****3 - Comparaison des deux modèles trinomiaux.....81****4 - Résultats numériques.....82****C - Résolution numérique de l'E.D.P. d'évaluation et lien avec les méthodes par arbre .....82****a. Le schéma implicite .....83**

b. Le schéma explicite - Lien avec le modèle par arbre trinomial selon Hull et White .....	84
§ 2 - La méthode des simulations .....	85
A - La génération des variables aléatoires normalement distribuée.....	88
a. Les principales techniques directe de génération de variable aléatoires normalement distribuée .....	89
1 - La technique de la somme .....	89
2 - La technique de Box-Muller.....	89
3 - La technique du rejet polaire de Marsaglia et Bray ( <i>polar rejection</i> ).....	90
4 - La technique de l'inversion de la loi normale .....	90
4.1 - Première inversion (approximative) de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite .....	90
4.2 - L'inversion de Moro de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite .....	91
b. Les générations quasi-aléatoires (quasi-random number) de loi uniforme .....	92
1 - L'algorithme de Halton .....	93
2 - L'algorithme de Fauré.....	94
3 - L'algorithme de Antonov et Saleev (variante de l'algorithme de Sobol) .....	94
c. Corrections des variables aléatoires générées.....	94
B - Quelques techniques spécifiques .....	95
a. Evaluation des options à barrière .....	95
1 - Positionnement du problème .....	95
2 - Exemple de méthode corrigeant la probabilité d'atteinte de la barrière.....	96
b. Evaluation des options américaines par la méthode de Barraquand et Martineau .....	96
EVALUATION DES OPTIONS A BARRIERE PORTANT SUR UN SEUL ACTIF RISQUE.....	97
C - Présentation des modèles classiques .....	98
a. Le modèle trinomial de Ritchken (1995) .....	99
b. Le modèle de Cheuk et Vorst.....	102
D - La méthode par interpolation.....	104
E - Evaluation partiellement séquentielle des options à barrière .....	108
a. Construction de l'arbre d'évolution du sous-jacent.....	109
b. Evaluation dans un cadre monopériodique .....	111
1 - Le cas d'une barrière de type <i>down</i> .....	111
2 - Le cas d'une barrière de type <i>up</i> .....	111
3 - Système général de probabilités .....	112

c. Extensions immédiates .....	112
d. Le cas des options à plusieurs barrières .....	114
1 - Options à double barrière désactivante .....	114
2 - Généralisation en présence de plusieurs barrières .....	115
e. Le cas des options américaines à barrière activante .....	116
f. Simulations .....	117
SECTION 2. EVALUATION D'UN ACTIF CONTINGENT A PLUSIEURS ACTIFS RISQUES .....	123
§ 1 - Evaluation des options contingentes à deux actifs risqués selon le principe de l'interpolation.....	124
§ 2 - Evaluation séquentielle d'un actif contingent à deux actifs risqués sous-jacents....	127
A - Le modèle de Kishimoto à deux actifs risqués .....	128
B - Amélioration du modèle de Kishimoto à deux actifs risqués .....	131
a. Respect des rendements des processus de diffusion.....	132
b. Convergence en loi.....	134
1 - Convergence de la distribution du rendement du premier actif .....	134
2 - Convergence de la distribution du rendement du second actif .....	136
3 - Respect de la corrélation des rendements .....	138
§ 3 - Généralisation de l'évaluation séquentielle d'un actif contingent à plusieurs actifs risqués sous-jacents.....	139
A - Respect des rendements des processus de diffusion .....	144
a. Respect des moments d'ordre 1 et 2 au cours d'une période.....	144
b. Convergence en loi.....	147
§ 4 - Applications .....	147
A - Option contingente à deux actifs risqués : comparaison avec le modèle de Stulz (1982).....	147
B - Option contingente à trois actifs risqués : Comparaison avec le modèle de Boyle, Evnine et Gibbs (1989) .....	149
§ 5 - Classification du prix des options .....	150
A - Indépendance des prix d'Arrow-Debreu par rapport aux caractéristiques des actifs sous-jacents .....	150
B - Application à la classification des options .....	150
<b>CHAPITRE 2.EVALUATION EN PRESENCE D'UNE VOLATILITE NON CONSTANTE.....</b>	<b>152</b>
SECTION 1. LES MODELES A VOLATILITE STOCHASTIQUE.....	156
§ 1 - Le modèle de Hull et White.....	158
§ 2 - Le Modèle de Heston.....	160

SECTION 2. INTEGRATION DU <i>SMILE</i> DE VOLATILITE .....	162
§ 1 - Extraction de la distribution du rendement .....	162
A - Le premier modèle de Rubinstein .....	162
B - Le second modèle de Rubinstein .....	164
C - Le Modèle de Dupire .....	165
§ 2 - Implémentation directe du <i>smile</i> de volatilité : le modèle de Derman, Kani et Chriss .....	165
SECTION 3. PRISE EN COMPTE D'UNE FOURCHETTE DE VOLATILITE.....	168
SECTION 4. UN MODELE A DEUX ACTIFS AVEC UNE VOLATILITE DU RENDEMENT DETERMINISTE.....	170
<b>CHAPITRE 3.EVALUATION EN PRESENCE DE TAUX STOCHASTIQUES .....</b>	<b>173</b>
SECTION 1. LES MODELES DE TAUX.....	175
§ 1 - Les différents processus de taux à court terme .....	176
§ 2 - Les modèles d'évolution de la courbe des obligations zéro-coupon : Ho et Lee (1986), Bonnasieux et Brunel (1993) .....	177
A - Présentation du modèle .....	177
B - Hypothèse sur la structure de volatilité du modèle de Bonnasieux et Brunel afin de supprimer l'obtention de taux négatifs .....	181
§ 3 - Le modèle d'évolution de la courbe des taux <i>forward</i> de Heath, Jarrow et Morton (1990) .....	183
§ 4 - Le modèle d'évolution du taux <i>spot</i> de Hull et White (1990) .....	186
§ 5 - Le modèle lognormal d'évolution du taux <i>spot</i> de Sandman et Sondermann (1992) .....	189
SECTION 2. EVALUATION D'UN ACTIF CONTINGENT AUX TAUX.....	192
§ 1 - Généralisation du modèle de Heath, Jarrow et Morton : Amin et Jarrow (1992) ...	193
A - Dynamiques des actifs risqués .....	193
B - Evaluation de l'actif contingent .....	194
§ 2 - Intégration de plusieurs courbes des taux : Amin et Bodurtha (1995) .....	195
A - Les dynamiques d'évolution .....	195
B - L'évaluation des actifs contingents .....	197
§ 3 - Evaluation dans le cadre d'un marché incomplet : Sandman (1993) .....	199
A - L'arbre quadrinomial d'évolution .....	199
a. Evaluation de l'actif contingent.....	201
b. La stratégie de portefeuille minimisant le risque .....	202

§ 4 - Evaluation séquentielle d'un actif contingent aux taux et à un actif risqué .....	203
A - Introduction.....	203
B - Le modèle d'Augros et Quérue.....	204
a. Rappel sur le modèle de taux sous-jacent .....	204
b. L'approche séquentielle .....	207
1 - Evolution de l'actif risqué sous-jacent.....	207
C - Evaluation d'un actif contingent aux taux et à un seul actif risqué .....	210
D - Variation de la variance du rendement de l'actif sous-jacent au cours du temps.....	212
E - Variation du coefficient de corrélation au cours du temps .....	214
§ 5 - Le modèle hexanomial.....	219
A - Les contraintes du modèle .....	220
a. 1 <sup>er</sup> essai.....	220
b. Contrainte pour avoir une volatilité constante.....	221
c. Contrainte pour avoir un coefficient de corrélation constant .....	221
B - L'approche hexanomiale .....	222
a. Evaluation d'un actif contingent aux taux et à un seul actif risqué .....	227
C - Convergences :.....	227
D - Applications numériques.....	230
E - Comparaison avec le modèle de Merton.....	233
F - Conclusion.....	236
<b><u>DEUXIEME PARTIE : STRATEGIES OPTIONNELLES.....</u></b>	<b>239</b>
<b>CHAPITRE 4.INTRODUCTION A LA GESTION DES OPTIONS .....</b>	<b>242</b>
SECTION 1. LES SPECIFICITES DU MARCHE FRANÇAIS.....	243
§ 1 - Fonctionnement du RM .....	243
§ 2 - Prise en compte du RM pour le paiement différé de l'achat des actions .....	245
§ 3 - Prise en compte du RM pour le paiement différé lors de l'exercice d'une option...	248
§ 4 - Prise en compte du report.....	249
SECTION 2. LES STRATEGIES OPTIONNELLES DE BASE.....	251
§ 1 - Les sensibilités des options .....	252
A - Présentation des dérivées partielles .....	253
a. le delta : $\delta = \frac{\partial C}{\partial S}$ .....	253
b. le gamma : $\gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$ .....	254

c. le $\theta$ et le time decay : $\theta = - \frac{\partial C}{\partial t}$ .....	254
d. le $\rho$ : $\rho = \frac{\partial C}{\partial r}$ .....	255
e. le vega : $v = \frac{\partial C}{\partial s}$ .....	256
f. le $\kappa$ : $\kappa = \frac{\partial^2 C}{\partial s^2}$ .....	257
g. l'omicron : $\frac{\partial C}{\partial X}$ .....	257
B - Liens entre les dérivées .....	257
§ 2 - Les stratégies classiques à base d'options .....	258
A - Les <i>spreads</i> (écarts verticaux).....	258
B - Les <i>calendars</i> (écarts horizontaux ou temporels) .....	259
C - Les <i>straddles</i> (stellages) .....	260
D - Les <i>strangles</i> (combinaisons) .....	261
E - Les <i>butterflies</i> (papillons) .....	261
F - Les condors .....	261
G - Le lien entre les <i>spreads</i> verticaux et les options digitales.....	262
H - Le puits et la marche.....	263
§ 3 - La relation de parité <i>call</i> / <i>put</i> .....	263
A - Introduction à la relation de parité à l'aide des options européennes .....	263
a. La relation de parité appliqué au portefeuille delta neutre simple .....	264
b. La relation de parité appliqué au portefeuille straddle delta neutre .....	265
c. La relation de parité appliqué au butterfly .....	265
B - La relation de parité dans le cas d'autres options.....	265
a. le cas des options américaines .....	265
b. Le cas des options digitales.....	266
1 - Les <i>cash or nothing</i> .....	266
2 - Les <i>asset or nothing</i> .....	266
§ 4 - La réplication .....	267
A - Le principe de la réplication .....	267
B - Les effets d'une couverture en temps discret .....	268
a. Effet du nombre de réajustements .....	270
b. Effet de la volatilité et de la maturité .....	270
1 - Effet de la maturité .....	270
2 - Effet de la volatilité : .....	272

c. La provenance des erreurs en général.....	273
SECTION 3. EFFET DU VERSEMENT DE DIVIDENDES.....	277
§ 1 - Dividende cash et dividende continu.....	278
§ 2 - Une source supplémentaire d'incertitudes.....	280
A - Dividende proportionnel.....	280
B - Dividende fixé.....	283
C - Dividende incertain.....	284
§ 3 - Effet sur le prix de l'option.....	286
A - Avec un dividende proportionnel.....	287
a. Effet sur les options vanilles.....	287
b. Effet sur les options exotiques.....	288
1 - 1 <sup>er</sup> cas : le <i>put down &amp; out</i> .....	288
2 - 2 <sup>ème</sup> cas : le <i>call double knock out</i> .....	289
3 - 3 <sup>ème</sup> cas : le <i>call strike reset lookback à barrière down &amp; out</i> .....	289
B - Avec un dividende constant.....	290
C - Avec un dividende aléatoire.....	291
a. Dividende aléatoire non proportionnel.....	291
b. Dividende aléatoire proportionnel.....	291
<b>CHAPITRE 5. LE CHOIX DE LA VOLATILITE EN L'ABSENCE DE COTATION.....</b>	<b>293</b>
SECTION 1. ETUDE DETERMINISTE DE LA VOLATILITE DU RENDEMENT DU COURS D'UNE ACTION.....	295
§ 1 - Unicité des volatilités implicites.....	296
A - Le lien prix - volatilité des options vanille.....	296
B - Multiplicité des volatilités implicites de certaines options exotiques.....	297
§ 2 - Etude de l'autocorrélation du rendement de l'action.....	299
§ 3 - Les cônes de volatilités.....	300
A - Elaboration des cônes de volatilités.....	301
B - Observations de l'historique.....	302
a. Etude de la densité des volatilités.....	303
C - L'information apportée concernant le prix de l'option.....	307
a. Une option est-elle sur cotée ?.....	307
b. Une option est-elle sous cotée ?.....	308
c. Critique de l'approche de Boghurdt et Lane.....	309
§ 4 - Les cônes de skewness et de kurtosis du rendement.....	310
§ 5 - Proposition de correction de la "volatilité historique Black et Scholes".....	312



A - Les différentes formes de <i>smile</i> .....	312
a. Skewness = 0 et kurtosis = 3 .....	312
b. Skewness = 0 et kurtosis > 3 .....	313
c. Skewness = 0 et kurtosis < 3 .....	313
d. Skewness < 0.....	313
e. Skewness > 0.....	314
B - Le modèle de Jarrow et Rudd.....	314
C - Extraction du <i>smile</i> de volatilité historique implicite Black et Scholes .....	315
a. Extraction de la volatilité .....	316
1 - Extraction numérique de la volatilité .....	316
2 - Extraction analytique de la volatilité .....	317
D - Mise en œuvre .....	318
SECTION 2. ETUDE NON DETERMINISTE DU RENDEMENT DU COURS D'UNE ACTION ET DE SA VOLATILITE.....	321
§ 1 - Vérification de l'hypothèse d'autocorrélation .....	322
A - Dans le cas du rendement.....	322
B - Dans le cas de la volatilité .....	323
§ 2 - Les processus ARMA .....	324
A - Les processus AR.....	324
a. Tests avec un AR(1) .....	325
1 - Le rendement.....	325
2 - La volatilité .....	326
b. Tests avec un AR d'ordre > 1 .....	327
1 - Le rendement.....	327
2 - La volatilité .....	329
B - Les processus ARMA .....	330
a. Le processus MA(q) .....	330
b. Le processus ARMA(p,q) .....	330
§ 3 - Les processus GARCH.....	332
A - Définition.....	332
B - Application au rendement de la CGIP.....	333
C - Mise en œuvre spécifique du processus GARCH – Extraction du <i>smile</i> de volatilité historique Black et Scholes .....	335
a. Mise en œuvre spécifique du processus GARCH .....	335
b. Extraction du <i>smile</i> de volatilité historique Black et Scholes .....	337
<b>CHAPITRE 6. TECHNIQUES DE GESTION AVANCEES .....</b>	<b>338</b>

SECTION 1. LA DURATION.....	340
§ 1 - Le concept de la duration expliqué avec les options américaines.....	340
A - Calcul de la probabilité d'exercice anticipé dans l'univers risque-neutre.....	341
a. Méthodologie .....	341
b. Illustration .....	343
1 - Exemple de mise œuvre .....	343
2 - convergence.....	345
B - Extension à l'univers réel.....	348
C - Calcul de la probabilité d'exercice anticipé à une date future donnée .....	348
a. Principe de la méthode .....	348
b. Illustration .....	353
D - Effet du versement des dividendes sur la duration .....	355
§ 2 - La duration dans le cas des options exotiques .....	358
A - Calcul de la duration des options digitales .....	358
B - Calcul de la duration des options à barrière.....	359
a. Etude analytique de la durée de vie des options à barrière .....	360
1 - La probabilité de transition .....	360
2 - Etude de la durée de vie des options à barrière.....	361
2.1 - Loi du maximum et du minimum d'un brownien avec tendance .....	361
2.2 - Option à barrière désactivante .....	362
2.3 - Option à barrière activante .....	363
2.3.1 La probabilité d'atteinte d'une barrière par le prix de l'action et de finir au-dessous .....	363
2.3.2 Etude du temps de passage.....	364
b. Etude numérique de la durée de vie des options à barrière.....	365
SECTION 2. LA GESTION DES DELTA NON USUELS .....	367
§ 1 - Les delta à paliers .....	367
§ 2 - Les delta non continus .....	368
A - Les problèmes rencontrés à l'échéance .....	368
B - Les problèmes de delta liés aux options binaires .....	369
C - Les problèmes liés aux options à barrière.....	372
a. Le cas des options à barrière régulière .....	373
b. Les options à barrière contraire (reversal) .....	374
c. Le rebate et le caractère américain, deux facteurs de stabilité dans la gestion dynamique.....	376
1 - Effet du <i>rebate</i> .....	376

2 - Effet du caractère américain .....	377
SECTION 3. LA DUPLICATION STATIQUE.....	378
§ 1 - La couverture statique des options à barrière .....	379
A - Les relations de symétrie .....	379
B - La couverture du <i>call down &amp; out</i> .....	380
C - La couverture du <i>call up &amp; out</i> .....	380
§ 2 - La couverture statique d'autres options exotiques.....	381
A - La réplication statique d'un <i>roll down call</i> étendu.....	381
Un <i>roll down call</i> peut être facilement étendu à $n$ ( $n > 2$ ) barrières basses. ....	381
La couverture proposée par Carr, Ellis et Gupta est la suivante : .....	381
B - La réplication statique d'un <i>ratchet call</i> .....	381
C - La réplication statique d'un <i>strike lookback call</i> .....	382
SECTION 4. LES OPTIONS EXOTIQUES AU PROFIT DE L'ASSURANCE ET DE LA SPECULATION..	384
§ 1 - L'assurance de portefeuille usuelle .....	384
A - L'assurance d'un titre unique .....	384
B - L'assurance d'un portefeuille .....	387
§ 2 - Les apports des options exotiques .....	388
A - La recherche des flux financiers souhaités .....	389
B - La recherche d'un produit spéculatif .....	389
C - La recherche d'un coût moins élevé d'assurance de portefeuille .....	391
D - La recherche de la dépendance du chemin suivi.....	391
a. Les asiatiques partielles, un frein à la manipulation des cours .....	391
b. Les lookback, une protection maximale .....	392
<b><u>CONCLUSION DE LA DEUXIEME PARTIE.....</u></b>	<b><u>394</u></b>
<b><u>CONCLUSION GENERALE.....</u></b>	<b><u>395</u></b>
<b><u>ANNEXES.....</u></b>	<b><u>399</u></b>
§ 1 - Annexe 1 : Les principales formules fermées d'évaluation d'option .....	400
A - Approximations de la loi normale .....	400
a. Approximation de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite .	400
b. Approximation de Drezner de la fonction de répartition de la loi normale	
bivariée .....	400
1 - 1 <sup>er</sup> cas : $a \leq 0$ , $b \leq 0$ et $p \leq 0$ .....	400

2 - 2 <sup>ème</sup> cas : $abp \leq 0$ sauf $a \leq 0$ , $b \leq 0$ et $p \leq 0$ .....	400
3 - 3 <sup>ème</sup> cas : $abp > 0$ .....	401
B - Options vanilles .....	401
a. La formule de Black et Scholes .....	401
b. La formule de Merton.....	401
c. La formule de Jarrow et Rudd .....	402
C - Options digitales.....	403
a. l'actif ou rien.....	403
b. l'option gap.....	403
c. l'option cash ou rien.....	403
d. option binaire à barrière .....	403
1 - down and in cash at hit or nothing.....	404
2 - up and in cash at hit or nothing.....	404
3 - down and in asset at hit or nothing.....	404
4 - up and in asset at hit or nothing .....	404
5 - down and in cash at expiry or nothing .....	404
6 - up and in cash at expiry or nothing.....	404
7 - down and in asset at expiry or nothing.....	404
8 - up and in asset at expiry or nothing.....	404
9 - down and out cash or nothing .....	405
10 - up and out cash or nothing .....	405
11 - down and out asset or nothing.....	405
12 - up and out asset or nothing .....	405
13 - down and in cash or nothing call.....	405
13.1 - $K > H$ .....	405
13.2 - $K < H$ .....	405
14 - up and in cash or nothing call.....	405
14.1 - $K > H$ .....	405
14.2 - $K < H$ .....	405
15 - down and in asset or nothing call .....	405
15.1 - $K > H$ .....	405
15.2 - $K < H$ .....	405
16 - up and in asset or nothing call.....	405
16.1 - $K > H$ .....	405
16.2 - $K < H$ .....	406
17 - down and in cash or nothing put.....	406
17.1 - $K > H$ .....	406

17.2 - $K < H$ .....	406
18 - up and in cash or nothing put.....	406
18.1 - $K > H$ .....	406
18.2 - $K < H$ .....	406
19 - down and in asset or nothing put.....	406
19.1 - $K > H$ .....	406
19.2 - $K < H$ .....	406
20 - up and in asset or nothing put.....	406
20.1 - $K > H$ .....	406
20.2 - $K < H$ .....	406
21 - down and out cash or nothing call.....	406
21.1 - $K > H$ .....	406
21.2 - $K < H$ .....	407
22 - up and out cash or nothing call.....	407
22.1 - $K > H$ .....	407
22.2 - $K < H$ .....	407
23 - down and out asset or nothing call.....	407
23.1 - $K > H$ .....	407
23.2 - $K < H$ .....	407
24 - up and out asset or nothing call.....	407
24.1 - $K > H$ .....	407
24.2 - $K < H$ .....	407
25 - down and out cash or nothing put.....	407
25.1 - $K > H$ .....	407
25.2 - $K < H$ .....	407
26 - up and out cash or nothing put.....	407
26.1 - $K > H$ .....	407
26.2 - $K < H$ .....	408
27 - down and out asset or nothing put.....	408
27.1 - $K > H$ .....	408
27.2 - $K < H$ .....	408
28 - up and out asset or nothing put.....	408
28.1 - $K > H$ .....	408
28.2 - $K < H$ .....	408
D - Option à simple barrière.....	408
1 - down and in call.....	409
1.1 - $K > H$ .....	409

1.2 - $K < H$ .....	409
2 - <i>up and in call</i> .....	409
2.1 - $K > H$ .....	409
2.2 - $K < H$ .....	409
3 - <i>down and in put</i> .....	409
3.1 - $K > H$ .....	409
3.2 - $K < H$ .....	409
4 - <i>up and in put</i> .....	409
4.1 - $K > H$ .....	409
4.2 - $K < H$ .....	409
5 - <i>down and out call</i> .....	409
5.1 - $K > H$ .....	409
5.2 - $K < H$ .....	410
6 - <i>up and out call</i> .....	410
6.1 - $K > H$ .....	410
6.2 - $K < H$ .....	410
7 - <i>down and out put</i> .....	410
7.1 - $K > H$ .....	410
7.2 - $K < H$ .....	410
8 - <i>up and out put</i> .....	410
8.1 - $K > H$ .....	410
8.2 - $K < H$ .....	410
E - option lookforward.....	410
F - Option à plusieurs sous-jacents.....	411
a. l'option d'échange .....	411
b. Option sur Maximum de deux actifs .....	411
c. Option sur Minimum de deux actifs.....	412
§ 2 - Annexe 2 - Evaluation des obligations indexées sur action .....	412
A - Principe de décomposition de l'OIA .....	413
B - Les modèles d'évaluation.....	415
a. Le modèle binomial.....	415
b. Le modèle à taux stochastique .....	418
c. Le modèle à volatilité stochastique .....	418
C - Comparaisons et interprétations des résultats numériques .....	419

<b>TABLE DES MATIERES.....</b>	<b>422</b>
--------------------------------	------------

<b><u>BIBLIOGRAPHIE.....</u></b>	<b><u>438</u></b>
----------------------------------	-------------------

Le résumé de la thèse se situe en dernière page.

## BIBLIOGRAPHIE

- AMIN K.I. et BODURTHA J.N., "Discrete-time Valuation of American Options with Stochastic Interest Rates", *Review of Financial Studies*, Spring 1995 Vol 8, N° 1, p 193-234
- AMIN K.I. et JARROW R.A., "Pricing options on risky assets in a stochastic interest rate economy", *Mathematical Finance*, Vol 2, n° 4, octobre 1992, p 217-237.
- ANDERSEN et BROTHERTON-RATCLIFFE, "Exact Exotics", *Risk*, Vol 9, N°10, octobre 96.
- ANTONOV et SALEEV, "An Economic Method of Computing  $LP_T$ -Sequences", *USSR Computational of Mathematical Physics*, 1979, Vol 19, p 252-256.
- AUGROS J.C. et NAVATTE P., *Les options négociables*, Ed Vuibert, 1987.
- AUGROS J.C., *Options et obligations convertibles*, Ed Economica, 1987, 2<sup>ème</sup> Edition.
- AUGROS J.C., *Les options sur taux d'intérêt*, Ed Economica, 1989.
- AUGROS J.C., "Evaluation probabiliste des options : introduction à l'univers *forward* neutre", *Journal de la Société Française de Statistiques*, 1<sup>er</sup> trimestre 1998.
- AUGROS J.C. et GAY P., "Modèle d'évaluation à taux d'intérêt stochastiques d'une option sur contrat à terme obligataire : application à la mesure des paramètres du modèle binomial", *Conférence Internationale de l'AFFI*, Paris, juin 1989.
- AUGROS J. C. et MORENO M., "Evaluation séquentielle d'un actif contingent aux taux et à un actif risqué", *Banques et Marchés*, novembre-décembre, 1999.
- AUGROS J. C. et MORENO M., "Evaluation séquentielle d'un actif contingent à plusieurs actifs risqués", Séminaire AFFI, 4 décembre 1998.
- AUGROS J. C. et MORENO M., "Evaluation partiellement séquentielle des options à barrière", Journées Internationales de l'AFFI, 28 juin 1999.
- AUGROS J. C. et MORENO M., "Evaluation des options négociables par l'interpolation des arbres de prix", *Bulletin Français d'Actuariat*, Vol 2 N°3, juin 1998.
- AUGROS J-C et MORENO M., "Evaluation des obligations indexées sur action", Cahiers de recherche de l'ISFA, 1999.
- AUGROS J. C. et QUERUEL M., "Modèle d'évaluation d'un actif contingent aux taux d'intérêt et à deux actifs risqués", *colloque AFIR Cairns Australie*, juillet 1997 et 14<sup>ème</sup> conférence internationale de finance AFFI, Grenoble, juin 1997.
- AVELLANEDA M., LEVY A. et PARÁS A., "Pricing and Hedging Derivative Securities in Markets with Uncertain Volatilities", Working Paper, Courant Institute of Mathematical Science.
- BANSHALI V., *Pricing and Managing Exotic and Hybrid Options*, Ed IRWIN LIBRARY of Investment & Finance, 1998.
- BARONE-ADESI G. et WHALEY R., "Efficient Analytic Approximation of American Option Values", *Journal of Finance*, 1987.
- BARRAQUAND, "Numerical Valuation of High Dimensional Multivariate European Securities", *Management Science*, 1995.



BARRAQUAND et MARTINEAU, "Numerical Valuation of High Dimensional Multivariate American Securities", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, n° 30, 1995, pp. 383-405.

BELLALAH M. et PRIGENT J.L., "L'évaluation des options américaines sur indices avec une volatilité composite", *Banque et Marchés*, mars-avril 1999.

BLACK F., DERMAN E. et TOY W., "A One-Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options", *Financial Analyst Journal*, janvier-février 1990, p 33-39.

BLACK F. et SCHOLES F., "The pricing of options and corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, Vol 81, n°3 , 1973, p 637-659.

BOGHURDT et LANE, "How to tell if options are cheap", *The Journal of Portfolio Management*, winter 1990, p72-78.

BOLLERSLEV T., "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity", *Journal of Econometrics*, 1986, vol 31

BONNASSIEUX M. et BRUNEL V., "Un modèle de Ho et Lee généralisé", *Colloque AFIR Rome*, 1993, p 57-74.

BOISSONNADE J., *Les options exotiques*, Ed ESKA, 1997.

BOULIER J.F., DANESI V. et SEQUIER P., "Le monde selon GARCH", *QUANTS*, décembre 1994, N°16.

BOURBONNAIS R., "Econométrie", *DUNOD*, 1998, 2è édition, Chap 9, "Eléments d'analyse des séries temporelles".

BOYLE P.P., "Options : A Monte Carlo Approach", *Journal of Financial Economics*, N°4, 1977

BOYLE P.P., "A Lattice Framework for Option Pricing with Two state Variables", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol 23, n° 1, March 1988, p 1 - 12.

BOYLE P.P., EVNINE J. et GIBBS S., "Numerical Evaluation of Multivariate Contingent Claims", *Review of Financial Studies*, vol 2, n°2, 1989, p 241-250.

BOYLE P. et HOON LAU S., "Bumping up Against the Barrier with the Binomial Method", *The Journal of Derivatives*, summer 1994.

BOYLE P.P. and LIN X., "Valuation of Options on Several Risky Assets when there are Transactions Costs ", *Advances in Futures and Options Research*, Vol 9, 1997, p 111-129.

BRATLEY et FOX, "ALGORITHM 659 : Implementing Sobol's Quasi Random Sequence Generator", *ACM Trans Math Software*, N° 14, 1988, p 88-100.

BRENNAN J. et SCHWARTZ E., "Finite Difference Methods and Jump Processes Arising in the Pricing of Contingent Claims : A Synthesis", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, septembre 1978.

BRENNAN J. et SCHWARTZ E., "A continuous Time Approach to the Pricing of Bonds ", *Journal of Banking and Finance*, vol 3, 1979.

BROQUET, COBBAUT, GILLET et Van den BERG, "Gestion de Portefeuille", Ed De Boeck Université, 3è édition

CARR, "European put call Symétrie", Working Paper, 1995.

- CARR P., ELLIS K. et GUPTA V., "Static Hedging of Path-Dependent Options", Working Paper, Cornell University, 1996.
- CARR P., ELLIS K. et GUPTA V., "Static Hedging of Exotic Options", Working Paper, Cornell University, mars 1996.
- CARR P. et CHOU A., "Breaking Barriers : Static Hedging of Barrier Securities", Working Paper, novembre 1996.
- CARR P. et CHOU A., "Hedging Complex Barrier Options", Working Paper, Avril 1997.
- CARR P. et MADAN D., "Towards a Theory of Volatility Trading", Working Paper, 16 décembre 1997.
- CHEUK T. et VORST T., "Complex Barrier Options", *The Journal of Derivatives*, fall 1996.
- CHEYETTE O., "Pricing Options on Multiple Assets", *Advances in Futures and Options Research*, vol 4, 1990, p69-81.
- CHUAN J., "The GARCH Option Pricing Model", *Mathematical Finance*, 1995, Vol 5.
- CLEWLOW et CARVERHILL, "On the Simulation of Contingent Claims", *Journal of Derivatives*, 1994, n°2, p 66-74.
- CLEWLOW et STRICKLAND, *Implementing Derivatives Models*, Ed Wiley, Financial Engineering, 1998.
- CORRADO C. et SU T., "Implied Volatility Skews and Stock Index Skewness and Kurtosis Implied by S&P 500 Index Options Prices", *The Journal of Derivatives*, 1997, summer.
- COX J., "The Constant Elasticity of Variance Option Pricing Model", *The Journal of Portfolio Management*, décembre 1996, Special Issue : "A Tribute to Fischer Black".
- COX J., INGERSOLL et ROSS, "A theory of the term structure of interest rates", *Econometrica*, 1985.
- COX J. et ROSS, "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes", *Journal of Financial Economics*, 1976
- COX J. and RUBINSTEIN M., "Option Markets", *Ed Prentice Hall*, 1985.
- COX J., ROSS S. et RUBINSTEIN M., "Option Pricing : A Simplified Approach", *Journal of Financial Economics*, Vol 7, 1979, p 229-264.
- DANA R-A et JEANBLANC-PICQUE M, "Marchés Financiers en Temps Continu - Évaluation et Equilibre", *Economica, Collection Recherche en Gestion*, 1994.
- DELEY, "Computer Generated Random Numbers", Working Paper, 1991
- DERMAN et KANI, "Stochastic Implied Trees Arbitrage Pricing with Stochastic Term and strike Structure of Volatility", *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, Vol 1, N°1, 1998, p 61-110.
- DERMAN E., KANI I. et CHRISS N., "Implied Trinomial Trees of the Volatility Smile", *The Journal of Derivatives*, summer 1996, Vol 3, n° 4.
- DEWYNNE J., HOWISON S. et WILMOTT P., "Option Pricing", *Mathematical models and Pricing – Oxford Financial Press*, 1993.
- DOUADY R, "Closed Form Formulas for Exotic Options and their Life Time Distribution", Working Paper, Courant Institute of Mathematical Sciences, septembre 97, p 12.
- ENGLE R., "ARCH Selected Readings", *Oxford University Press*, 1995.

- EVNINE J.J., "Three Essays in the Use of Option Pricing Theory", Thèse, *Université de Californie, Berkeley*, 1983.
- FAMA E. et SCHWERT G., "Asset Return and Inflation", *Journal of Financial Economics*, 1977, vol 5.
- FINUKEN., "Binomial Approximations of American *call* Option Prices with Stochastic Volatilities", *Advances in Futures and Options Research*, Vol 7, p113-134, 1994.
- FISHER L. et WEIL R., "Coping with Risk of Interest Rate Fluctuations : Returns to Bondholders from Naive and optimal Strategies", *Journal of Business*, octobre 1971, Vol 4.
- FORSYTH P, VETZAL K et ZVAN R, "PDE Methods for Pricing Barrier Options", *Document téléchargé sur Internet*, Université de Waterloo, Centre for Advances Studies in Finance, Juillet 1997.
- GEMAN H. et YOR M., "Pricing and Hedging Double-Barrier Options : A Probabilistic Approach", *Mathematical Finance*, 1996, Vol 6, p 365-378.
- GESSER et PONCET, "Volatility patterns : theory and some evidence from the Dollar-Mark option market", *Journal of Derivatives*, 1997, N°5, p 46-61 (note de fin 11).
- GESSER, "Evaluation d'options de change européennes et exotiques avec volatilité stochastique", Thèse Université Paris 1, 1999.
- GLOSTEN L., JAGANNATHAN R. et RUNKLE D., "Relationship Between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return", *Banking Research Center, Working Paper N° 166*, Northwestern University, Evanston, IL.
- GOURIEROUX C., "Modèles hétéroscédastiques", *Encyclopédie des marchés financiers*, TOME II, Ed Economica, 1997, Article 59.
- GOURIEROUX C., JASIAK J. et LE FOL G., "Intraday Market Activity", CREST DP 9633, 1996.
- HALTON, "On the Efficiency of Certain Quasi-Random Sequences of Points in Evaluating Multi-Dimensional Integrals", *Numerische Mathematik*, Vol 2, 1960, p 84-90.
- HE H., "Convergence from Discrete to Continuous Time Financial Model", *Walter A. HAAS SCHOOL of Business Research program in finance Working Paper Series*, October 1989, University of California at Berkeley, finance Working Paper N° 190 (et 199).
- HEATH D., JARROW R. et MORTON A., "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates : A Discrete Time Approximation", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol 25, 1990, p 419-440.
- HEATH D., JARROW R. et MORTON A., "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates : A New Methodology for Contingent Claims Valuation", *Econometrica*, vol 60 n°1, janvier 1992, p 77-105.
- HESTON, "A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options", *Review of Financial Studies*, N°6, 1993.
- HESTON, "A simple New Formula for Options With Stochastic Volatility", Working Paper, sept 1997, John M. Olin School of business, Washington University in St. Louis.
- HEYNEN P. et KAT H., "Crossing Barrier", *Risk*, 1994, Juin, p 46-51.
- HEYNEN P. et KAT H., "Partial Barrier Options", *Journal of Financial Engineering*, 1994, Vol 3, p 253-274.

HO T. et LEE S-B., "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims", *Journal of Finance*, Vol 41, n°5, décembre 1986.

HSIEH, "Testing for nonlinear dependence in daily foreign exchange rates", *Journal of Business*, N°62, 1989.

HSU H., "Surprised Parties", *Risk*, october 1997, Vol 10, p27-29.

HULL et WHITE, "The Pricing of Options on assets with stochastic volatilities", *Journal of Finance*, N°42, 1987.

HULL et WHITE, "Valuing Derivative Securities Using the Explicite Finite Difference Method", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, March 1990.

HULL et WHITE, "The Use of the Control Variate Technique in Option Pricing", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol 23, n°3, septembre 1988.

HULL J.C., "*Options, Futures and Other Derivatives*", Prentice Hall, International Edition, third edition, 1997.

IKEDA et KUNIMOTO, "Pricing Options with Curved Boundaries", *Mathematical Finance*, N° 2, 1992.

JACKWERTH et RUBINSTEIN, "Recovering Probability Distributions from Contemporaneous Security Prices", Finance Working Paper N°250, *University of California at Berkeley*, September 20, 1995.

JACKWERTH, "Implied Binomial Trees : Generalizations and Empirical Tests", Working Paper N° RPF-262, *University of California at Berkeley*, June 1996.

JARROW R. et RUDD A., "Option Pricing", *Ed Irwin, Homewood*, 1983.

JOY, BOYLE et TIAN, "Quasi-Monte Carlo Methods in Numerical Finance", *Management Science*, Vol 42, N°6, June 1996.

KAZZIHA S. et REBONATO R., "Unconditional Variance, Mean Reversion and Short Rate Volatility in the Calibration of the Black, Derman and Toy Model and of Two -Dimensional Log-Normal Short Rate Models", *Electronic Journal of Financial Risk, Net Exposure* : [http://www.netexposure.co.uk/regd/issues/2/kazziha\\_rebonato/index.html](http://www.netexposure.co.uk/regd/issues/2/kazziha_rebonato/index.html), novembre 1997.

KISHIMOTO N., "Pricing of Asset-Linked Bonds Under Interest Rates Risk", thesis, Graduate School of Business Administration, *Université de New York*, 1987.

KISHIMOTO N., "Pricing Contingent Claims under Interest Rate and Asset Price Risk", *Journal of Finance*, Vol XLIV, N° 3, July 1989.

KUNIMOTO N. et IKEDA M., "Pricing Options with Curved Boundaries", *Mathematical Finance*, 1992, Vol 2, p275-298.

LEISEN D., "Stock Evolution Under Stochastic Volatility : A Discrete Approach", discussion Paper N° B-427, *Université de Bonn*, March 1998.

LEISEN D. et LAURENT J.-P., "Building a Consistent Pricing Model from Observed Option Prices", 9 décembre 1998, Document téléchargé sur internet, server Netec, JEL Classification C51,G13,G14.

LEBOISNE N., "Modèles d'évaluation d'actifs dérivés d'actions émis par les entreprises", Thèse *Université Lyon 1*, 13 janvier 1999.

LENORMAND G., "Options sur indice et gestion de portefeuille actions", Thèse *Université Rennes 1 – CNRS CREREG*, 7 janvier 1997.

MACAULAY F., "Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates. Bond Yields and Stock Prices in the US Since 1856", *NBER*, New York, 1938.

MANDELBROT B., "The Variation of Certain Speculative Prices", *Journal of business*, 1963, vol 36.

MANNAÏ S., "Market Making" *Encyclopédie des marchés financiers TOME 2*, Economica, Article 52, p 1075, note de bas de page 13.

MARGRABE W., "The Value of an Option to Exchange One Asset to Another", *Journal of Finance*, vol 33, 1978, p177-186.

MARSAGLIA et BRAY, "A Convenient Method for Generating Normal Variables", *SIAM Review*, 1964, N°4.

MERTON R.C., "Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, Printemps 1973.

MERTON, "Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discontinuous", *Journal of Financial Economics*, mai 1976, vol 3.

MORO, "The Full Monte", *Risk*, Vol 8, N°2, Février 95, p57-58.

MUSIELA M. et RUTKOWSKI M., "Martingale Methods in Financial Modelling", *Springer Applications of Mathematics*, N° 36, 1997.

NELKEN I., "The Handbook of Exotic Options", *IRWIN Professional Publishing*, 1996.

NELSON D., "ARCH Models as Diffusion Approximations", *Journal of Econometrics*, 1990, vol 45.

PARZEN E., "Modern Probability Theory and Its Applications", *Wiley Publications In Statistics*, 9<sup>ème</sup> édition, mars 1967.

PILVERDIER-LATREYTE J., "Marché boursier français : structure et organisation", *Encyclopédie des marchés financiers TOME 1*, Economica, Article 38, p 725.

PONCET P. et QUITTARD-PINON F., "Instrument de gestion du risque de taux d'intérêt", *Revue du Financier*, 1994, Vol 97.

PRIGENT J.L., "Option Pricing with a General Marked Point Process", *AFFI Grenoble*, 1997.

PRIGENT J.L., RENAULT O. et SCAILLET O., "Option Pricing with Discrete Rebalancing", *Journées internationales de l'AFFI* 1999.

QUERUEL M., "L'analyse du risque de taux d'intérêt dans un établissement bancaire", thèse, décembre 1996, *ISFA, Université Claude Bernard Lyon 1*.

QUITTARD-PINON, *Marché des Capitaux et Théorie Financière*, Ed Economica, 2<sup>ème</sup> édition, 1998.

REIMER M. et SANDMANN K., "A discrete Time Approach for European and American Barrier Options", *Document téléchargé sur Internet*, Université de Bonn, département de statistique, Mars 1995.

REBONATO R., "Interest-Rate Option Models", *Ed. Wiley – Financial Engineering*, 2<sup>nd</sup> Edition, 1996.

REIMER M. et SANDMANN K., "A discrete Time Approach for European and American Barrier Options", *Document téléchargé sur Internet*, Université de Bonn, département de statistique, Mars 1995.

- REINER E. et RUBINSTEIN M., "Breaking *down* the Barriers", *Risk*, September 1991, p 28-35.
- REINER E. et RUBINSTEIN M., "Exotic Options", Working Paper, 1994
- RICH D., "The Mathematical Foundations of Barrier Option-Pricing Theory", *Advances in Futures and Options Research*, 1994, Vol 7, p 267-311.
- RITCHKEN P., "On Pricing Barrier Options", *The Journal of Derivatives*, Winter 1995, p 19-28.
- RITCHKEN P. et TREVOR R., "Pricing Options Under Generalised GARCH and Stochastic Volatility Process", CMBF Papers, N° 19, Macquarie University, septembre 1997.
- ROLL R., "An Analytic valuation Formula for Unprotected American *call* Options on Stocks with Known Dividends", *Journal of Financial Economics*, 1977, Vol 5.
- ROURE F. et BUTERY A., *Les options négociables*, Ed PUF, 1989.
- RUBINSTEIN M., "Return to Oz", *RISK*, Novembre 1994.
- RUBINSTEIN, "Implied Binomial Trees", Working Paper Finance Reprint N°87 revised July 1994, *University of California at Berkeley*, reprinted from *The Journal of Finance*, Vol LXIX, N°3, July 1994.
- RUBINSTEIN M., "Exotic Options", "Walter A. HAAS SCHOOL of Business Research program in finance Working Paper Series", Décembre 1991, University of California at Berkeley, finance Working Paper N° 220.
- SANDMANN K., "The pricing of options with an uncertain interest rate : a discrete-time approach", *Mathematical Finance*, Vol 3, n° 2, April 1993, p 201-216.
- SANDMANN K. et SONDERMANN D., "A term structure model and the pricing of interest rate derivative", *Review of Futures Markets*, vol 12/2, 1993, p 391-423.
- SCHINDELMAN, Rapport de stage, Société de Bourse Aurel, 1<sup>er</sup> juin 30 septembre 1998, DEA de statistique et modèles aléatoires en économie et finance, Université Paris 7–Paris 1.
- SINGH, "Estimation of multifactor Cox, Ingersoll et Ross term structure model : evidence on volatility structure and parameter stability", *The journal of fixed income*, septembre 1995.
- SCHWERT G., "Business Cycles, Financial Crises and Stock Volatility", *Working Paper*, University of Rochester, 1988.
- SHREVE S., *Stochastic Calculus and Finance*, July 25, 1997, DRAFT Version.
- SOLNIK B., "The Distribution of Daily Stock Returns and Settlement Procedures : The Paris Bourse", *The Journal of Finance*, Décembre 1990, Vol 45, N° 5.
- TALEB N., *Dynamic Hedging – Managing Vanilla and Exotic Options*, Ed Wiley Financial Engineering, 1996.
- TIAN Y., "A Modified Lattice Approach to Option Pricing", *Journal of Futures Markets*, vol 13, n°5, août 1993, p 563-577.
- TOFT K. et REINER E., "Currency-Translated Foreign Equity Options : The American Case", *Advances in Futures and Options Research*, 1997, Vol 9.
- STAPELTON R. and SUBRAHMANYAM, "The Valuation of Multivariate Contingent Claims in Discrete Time Models", *Journal of Finance*, vol 39, 1984, p207.
- STULZ R., "Options on the Minimum or the Maximum of two Risky Assets", *Journal of Financial Economics*, vol 10, 1982, p161-185.

TALEB N., "Volatility Is Not As Stochastic As You Think", <http://pw1.netcom.com/~ntaleb/pseudo.htm>

TALEB N., "Dynamic Hedging", *Ed Wiley*, Financial Engineering, 1996

VASICEK O., "An Equilibrium Characterization of the Term Structure", *Journal of Financial Economics*, 1977, vol 5.

WILMOTT P., *Derivatives*, Wiley University Edition, 1998.

YANG T., "Analysis of the SSAP Method for the Numerical Valuation of High Dimensional Multivariate American Securities", <http://fischer.loyola.edu/research/paper4.html>, Working Paper.

**Résumé :**

Les options sur actions sont des titres financiers qui donnent le droit au détenteur d'acheter ou de vendre, à une date fixée et à un prix contractuel, dix actions d'une même société. Si le contrat optionnel peut être exercé à tout instant, l'option est dite américaine. Si, au contraire, l'exercice ne peut avoir lieu qu'à une seule date, l'option est dite européenne. Les options exotiques sont des produits dérivés d'actions qui présentent une ou plusieurs différences par rapport aux options européennes ou américaines. Leur complexité n'a pas de limite, si ce ne sont les difficultés que posent leur évaluation. La prise en compte des dividendes d'une part, et le règlement et la livraison des actions, retardés par les dispositions réglementaires du marché français d'autre part, rendent les formules analytiques d'évaluation caduques au profit des méthodes numériques. Dans la première partie de la thèse, deux nouvelles méthodes d'évaluation des options exotiques sont proposées. La première, intuitive, mais dont la convergence mathématique est démontrée, permet de mieux comprendre les spécificités de ces contrats. La seconde, plus générale, présente l'avantage de pouvoir être utilisée pour l'évaluation d'une très grande majorité de contrats conditionnels. Enfin, les options jouent un rôle majeur dans la spéculation ou l'assurance d'un portefeuille boursier. Et de même qu'elles sont techniquement difficiles à évaluer, leurs gestions suscitent un grand intérêt. D'abord en raison de l'absence de cotation (ces titres sont traités sur le marché de gré à gré), mais aussi parce que leur durée de vie est généralement incertaine. Ainsi, la variance historique du rendement de l'actif sous-jacent tient souvent un rôle plus déterminant que pour les options classiques ; une nouvelle mesure en est proposée. Un dernier apport réside dans l'élaboration d'une méthode du calcul de la durée de vie moyenne de ces options.

**Abstract :**

Share options are financial contracts which give the right, but not the obligation, to the owner to obtain, at a fixed date, ten shares (in the French case) at a given price. If the exercise of the contract can be done during the whole life of the option, then the kind of the option is American, whereas if the exercise may only occur at the maturity the option is told European. We devoted this thesis in the pricing and the managing of exotic options on shares, e. a. options which possess one or several differences according to the preceding. Without the difficulty encountered in the pricing, these contracts would not be limited in their complexity. The choice of share as underlying is firstly due to the number of exchanges of classic options, and secondly, because the methods employed for the valuation could be used in the case of index. Two new ways are introduced to price these contracts. The first one is based on an interpolation principle. The second one deals with the sequential approach known thanks to Kishimoto (Journal of Finance - 1989). The optional financial contracts play an important rule in the speculation and in insurance. Indeed, their specification can provide them a high leverage useful for improving the overall performance of a portfolio whereas the right and not the obligation to exercise the product may give a good insurance against falls (in general). As they are traded on the OTC market, the historical volatility of the return of the risky asset is much more important than for quoted options. So we propose a measure of the volatility defined as an "implicit-historical" one. Lastly, we give a numerical method to estimate the life-time distribution of the American and exotic options.

**Discipline :** SCIENCES DE GESTION

**Mots Clés :** option, exotique, arbre, séquentiel, interpolation, gestion.

**Keywords :** option, exotic, tree, sequential, interpolation, management.

**Adresse du laboratoire :**

Laboratoire de Sciences Actuarielle et Financière  
UCBL – ISFA – bât 101  
43, bd du 11 novembre 1918  
69622 – Villeurbanne CEDEX  
Tél : 04.72.43.11.75