

EVALUATION SEQUENTIELLE D'UN ACTIF CONTINGENT AUX TAUX ET A UN ACTIF RISQUE

Jean-Claude AUGROS

Professeur à l'ISFA
Université Claude Bernard Lyon I
Bât 101 - ISFA
43, Bd du 11 novembre 1918
69622 – Villeurbanne CEDEX

Michaël MORENO

Allocataire - Moniteur
Université Claude Bernard Lyon I
Bât 101 - ISFA
43, Bd du 11 novembre 1918
69622 - Villeurbanne CEDEX

Le 2 novembre 1998

Résumé :

Après avoir mis en évidence, dans les modèles séquentiels d'évaluation d'actifs contingents de Kishimoto (1989) et d'Augros et Quéruel (1997), l'évolution au cours du temps du coefficient de corrélation entre le rendement de l'actif sous-jacent et les taux d'intérêt sans risque, ainsi que celle de la volatilité du rendement du sous-jacent, les auteurs proposent une amélioration de l'approche séquentielle d'évaluation d'un actif contingent, en présence de taux d'intérêt stochastiques, permettant d'obtenir soit une volatilité constante du sous-jacent, soit un coefficient de corrélation constant au cours du temps. Cette amélioration est obtenue à l'aide d'un modèle hexanomial, qui à l'instar des approches séquentielles antérieures, permet la prise en compte du caractère américain éventuel de l'actif contingent à évaluer. Enfin, un lien est établi avec le modèle de Merton (1973) dans le cas de l'évaluation d'une option européenne.

Abstract :

In the sequential approach allowing American contingent claim valuation, according to Kishimoto (1989) and generalized by Augros & Quéruel (1997), neither the correlation coefficient between the return on the risky asset and the risk-free interest rate, nor the volatility of the risky asset return are constant through time. After demonstrating this first result, the authors show how to improve the models using a hexanomial lattice for the evolution of the risky asset. Thus, it is possible, in many cases to obtain either a constant volatility or a constant correlation coefficient. Lastly, a link is established with Merton's model (1973) in the case of a European option.

Mots clés :

Actif contingent, action, méthode séquentielle, option, structure des taux.

keywords :

Contingent claim, share, sequential approach, option, interest rates structure.

Evaluation séquentielle d'un actif contingent aux taux et à un actif risqué

I. Introduction

Alors que le problème de l'évaluation d'une option européenne sur action, en présence de taux d'intérêt stochastiques, a été résolu par Merton en temps continu dès 1973, la prise en compte du caractère américain d'une option a été plus longue à intégrer dans ce cadre d'évaluation. D'évidence, une modélisation en temps discret peut utilement être proposée pour satisfaire cet objectif. Dans cet esprit, une avancée théorique importante a eu lieu grâce à la modélisation de l'évolution de la structure par terme des taux d'intérêt proposée par Ho et Lee (HL - 1986). A l'instar du modèle de Cox, Ross et Rubinstein (CRR - 1979) pour les options sur actions, ce modèle propose une évolution binomiale de la courbe du prix des obligations zéro-coupon. Cette courbe est une donnée d'entrée et les prix des actifs contingents sont indépendants des préférences des investisseurs. Plus tard, Heath, Jarrow et Morton (HJM - 1992) devaient généraliser l'approche de HL à une économie en temps continue à plusieurs facteurs. Plutôt que de définir le processus du prix des obligations zéro-coupon, HJM spécifient celui des taux forward et intègrent une structure de volatilité des taux. En fait, Bonnassieux et Brunel (BB - 1993) ont démontré que le modèle de HJM, dans sa version discrète (1990), n'est recombinaut que si celui-ci est restreint à l'approche de HL munie d'une structure par maturité de la volatilité des taux. Une autre méthode, initiée par Black, Derman et Toy (BDT - 1990) et généralisée par Sandmann et Sondermann (1993) propose une évolution lognormale du taux court qui évite l'apparition de taux négatifs. Dans le cadre du modèle de BDT, Kazzuha et Rebonato (1997) montrent que la volatilité du taux court est indépendante du retour à la moyenne du logarithme de ce taux et de sa volatilité historique. Toutefois, la vitesse du retour à la moyenne est entièrement déterminée par les valeurs futures de la volatilité du sous-jacent.

A ce jour, l'intégration de ces processus stochastiques d'évolution des taux au sein d'un modèle par arbre, pour évaluer une option sur un actif risqué, s'est faite selon deux approches. Boyle, Evnine et Gibbs (1989) ont tout d'abord construit les premiers arbres *lasers* (arbres multinomiaux) à plusieurs actifs risqués sous-jacents. Cette approche peut facilement être étendue au cas où le taux court prendrait la place de l'un des actifs risqués. Une seconde méthode, introduite par Evnine en 1983, repose sur la décomposition de chaque période d'évolution en plusieurs sous périodes selon un modèle binomial multiple. Les effets des facteurs pris en compte pour l'évolution du prix des actifs se produisent au cours de sous périodes distinctes. Sur chacune de ces sous périodes, les prix des actifs risqués sous-jacents évoluent selon un processus binomial. L'évaluation du prix de l'actif contingent est libre d'arbitrage grâce au cloisonnement entre les périodes d'évolution des différentes composantes spécifiques des actifs. Kishimoto (1989) a adopté cette approche séquentielle pour l'évaluation d'une option sur action sous l'hypothèse de taux stochastiques. Cette fois-ci, au cours de la première sous période, la courbe des taux zéro-coupon et la composante de l'actif corrélée aux taux évoluent, puis, durant la seconde sous période, seule la composante spécifique de l'actif, indépendante du mouvement des taux, varie.

Le modèle de Kishimoto généralisé, dû à Augros et Quérueu (AQ - 1996), intègre une fonction de volatilité des taux par maturité. La méthode proposée dans le présent article reprend cette approche, en considérant, cette fois-ci, le processus trinomial de Boyle (1988)

pour l'évolution de la composante spécifique de l'actif. En fait, l'objet de cette démarche est de corriger les inconvénients des approches séquentielles antérieures. En effet, comme il est démontré dans l'article, les modèles développés jusqu'alors impliquent une évolution de la variance du rendement de l'actif risqué au cours du temps et du coefficient de corrélation entre le rendement de l'actif sous-jacent et les taux d'intérêt. L'avantage de la méthode exposée ici est de permettre l'intégration d'une fonction de volatilité du rendement de l'actif risqué au cours du temps. Ainsi, il est possible d'obtenir soit un coefficient de corrélation constant soit une variance du rendement constante au cours du temps. Par ailleurs, si aucun de ces défauts n'est corrigé, un smile de volatilité de l'actif risqué par maturité peut, le cas échéant, être intégré.

L'article est organisé de la façon suivante : en premier lieu, les inconvénients des modèles de Kishimoto et d'Augros et Quérue, dus à l'évolution, au cours du temps, du coefficient de corrélation et de la volatilité du sous-jacent, sont mis en évidence. En deuxième lieu, le modèle hexanomial associant celui de Ho et Lee généralisé et le modèle trinomial de Boyle, est présenté. Enfin, en troisième lieu, les liens entre l'approche proposée et le modèle de Merton (1973) sont établis et, dans un cas particulier, une comparaison des modèles est effectuée.

II. Le modèle de Kishimoto généralisé

L'évolution du prix d'un actif suivant un mouvement brownien géométrique corrélé avec les taux peut être représenté, en temps discret, par deux processus binomiaux simultanés. Ce schéma conduit alors à un processus quadrimomial, quatre états de la nature possibles succédant à un état initial. L'existence de quatre états pour seulement trois actifs, l'actif sous-jacent, un zéro-coupon et l'actif contingent, empêche la constitution d'un portefeuille de couverture.

L'approche séquentielle proposée par Kishimoto permet précisément de contourner cette difficulté. En associant le modèle de HL généralisé et celui de Cox, Ross et Rubinstein (CRR - 1979), AQ ont étendu cette démarche à l'évaluation d'un actif contingent à un ou plusieurs actifs risqués. Avant de montrer les contraintes impliquées par ce modèle, nous commençons par rappeler le principe d'évolution des taux sur lequel il repose (ce modèle de taux est repris pour l'approche hexanomiale), ainsi que celui de l'approche séquentielle.

A. Le modèle de taux sous-jacent

Dans cette approche, la courbe initiale des prix des obligations zéro-coupon évolue selon un treillis binomial recombinant respectant les hypothèses suivantes :

- l'absence d'opportunité d'arbitrage ;
- l'existence d'un marché complet et sans friction ;
- la présence d'actifs parfaitement divisibles ;
- la subdivision de l'intervalle de gestion en N périodes, de durée identique égale à Δt , délimitant les dates auxquelles ont lieu les transactions ;
- l'indépendance du chemin suivi, de telle sorte qu'une hausse des taux (baisse des prix), suivie d'une baisse, est équivalente à une baisse des taux (hausse des prix), suivie d'une hausse.

La structure des taux zéro-coupon est représentée par une fonction d'actualisation (prix des zéro-coupon) désignée par $P_i^n(t)$, où n est l'indice de l'instant considéré, où i identifie l'état de la nature par le nombre de hausses des facteurs d'actualisation intervenues depuis la

date 0 et où t désigne la maturité exprimée en nombre de périodes. Les conditions de bords sont : $P_i^n(0) = 1, \forall (i, n)$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} P_i^n(t) = 0, \forall (i, n)$. On note par la suite $P_i^n = P_i^n(1)$.

L'attrait du modèle réside dans le fait, outre sa simplicité, qu'à l'instant initial, la fonction d'actualisation initiale coïncide avec celle du marché. Celle-ci, désignée par $P(\cdot)$ est donc une donnée d'entrée du modèle.

L'inconvénient du modèle de HL est de générer des taux spot et forward négatifs lorsque la courbe des taux présente une forme trop irrégulière. En outre, les taux des différentes échéances sont parfaitement corrélés. Enfin, la volatilité des taux est la même quelle que soit la maturité envisagée.

Afin de corriger ce dernier inconvénient, BB ont intégré au modèle de HL une structure de volatilité déterministe dépendante de la maturité des taux.

En avenir incertain, les facteurs d'actualisation $P_i^{n+1}(t)$ et $P_{i+1}^n(t)$ sont différents. Deux fonctions perturbatrices $h(n+1, t)$ et $h^*(n+1, t)$, modélisant cette différence, définissent la relation entre les prix de deux nœuds successifs de l'arbre.

En cas de hausse des taux (baisse des facteurs d'actualisation), il vient :

$$P_i^{n+1}(t) = \frac{P_i^n(t+1)}{P_i^n} h^*(n+1, t), \text{ avec } h^*(n+1, t) < 1. \quad (1)$$

et en cas de baisse des taux (hausse des facteurs d'actualisation), on a :

$$P_{i+1}^n(t) = \frac{P_i^n(t+1)}{P_i^n} h(n+1, t), \text{ avec } h(n+1, t) > 1. \quad (2)$$

La constitution d'un portefeuille d'arbitrage permet de relier les valeurs de h et h^* de telle sorte que :

$$p h(n, t) + (1-p) h^*(n, t) = 1, \text{ pour tout } (n, t).$$

Où π est la probabilité risque neutre de baisse des taux.

L'indépendance des chemins suivis permet d'exprimer les valeurs de h et h^* en fonction de p et $d(\cdot)$ paramètre de volatilité des taux dépendant de leur maturité t ; soit :

$$h(n, t) = \frac{1}{p + (1-p) \frac{d(t+n)}{d(n)}} \quad (3)$$

$$h^*(n, t) = \frac{\frac{d(t+n)}{d(n)}}{p + (1-p) \frac{d(t+n)}{d(n)}} \quad (4)$$

Par un raisonnement de récurrence, on obtient, à partir des équations (1), (2), (3) et (4), la valeur d'un zéro-coupon pour un état (i, n) quelconque, en fonction de la fonction d'actualisation initiale, soit :

$$P_i^n(t) = \frac{P(t+n)h(1, t+n-1) \times \dots \times h(n, t) \left(\frac{d(t+n)}{d(n)} \right)^{n-i}}{P(n)h(1, n-1) \times \dots \times h(n-1, 1)} \quad (5)$$

A l'instant 0, la valeur actualisée $s_{taux}(n, t)$ de la volatilité des taux dépend alors de la date n de début de l'effet du taux et de sa maturité t considérées :

$$s_{taux}(n, t) = -n_0^{3/2} \sqrt{q(1-q)} \ln \left[\left(\frac{d(t+n)}{d(n)} \right)^{1/t} \right]$$

Où n_0 est le nombre de périodes par an et q la probabilité réelle de baisse des taux zéro-coupon.

L'intégration d'une fonction de volatilité des taux par maturité rend plus réaliste la modélisation de l'évolution des taux zéro-coupon. Toutefois, l'absence de force de rappel sur les taux subsiste et la possibilité d'obtenir des taux négatifs est maintenue.

L'estimation des paramètres p et d du processus d'évolution des taux, nécessaire à l'implémentation du modèle, peut être réalisée par calage sur le prix de marché des options de taux les plus liquides (Augros et Gay 1989). Au plan pratique, la faible sensibilité du modèle aux variations de la probabilité p incite à retenir la valeur $1/2$ pour ce paramètre. Si l'on admet l'hypothèse des anticipations locales¹ où $q=p$, la fonction $d(t)$ peut être alors facilement déterminée par calage avec les données de marché. Il vient dans ce cas :

$$d(t) = \exp \left(- \frac{t \times s_{taux}(0, t)}{n_0^{3/2} \sqrt{p(1-p)}} \right)$$

où $s_{taux}(0, t)$ est la volatilité annualisée initiale du taux annuel continu de maturité t .

B. L'approche séquentielle

a. Evolution de l'actif risqué sous-jacent

Le principe d'évolution séquentielle du prix d'un actif, défini par Kishimoto, est repris ici, le modèle de taux retenu étant toutefois celui de HL généralisé. Les hypothèses du modèle sont donc les suivantes :

H1 : l'intervalle de gestion est divisé en N périodes de longueur Dt identique. Chaque période est elle-même subdivisée en deux sous périodes, dont la seconde est de durée infiniment courte ; la date intermédiaire de la $(n+1)^{ième}$ période est notée $n+1/2$. Les transactions ont lieu uniquement au début de chaque sous période.

H2 : le marché est supposé complet et sans friction. Il n'y a ni taxe, ni coût de transaction, ni restriction sur les ventes à découvert. Les actifs sont parfaitement divisibles.

H3 : à chaque date de transaction il existe un zéro coupon pour toutes les maturités.

H4 : au cours de la première sous période, les taux d'intérêt évoluent selon le schéma binomial de HL généralisé. Durant la seconde sous période, la structure des taux ne varie pas ; cette seconde sous période étant infiniment courte, le taux d'intérêt sur la longueur de cette période est considéré comme nul. Au cours de la première sous période de la $n^{ième}$ période, la variation des taux induit une modification du prix de

l'actif qui est multiplié soit par $\frac{u_i^n}{P_i^n}$, en cas de baisse des taux, soit par $\frac{d_i^n}{P_i^n}$, en cas de

hausse des taux, où $P_i^n = P_i^n(1)$ et où i référence le nombre de hausses de la structure des taux intervenues de la date 0 à la date n .

H5 : au cours de la seconde sous période, le prix de l'actif varie indépendamment des taux selon le processus binomial défini par CRR. Le prix de l'actif est ainsi multiplié, en cas de hausse, par un facteur $\bar{u} > 1$ et, en cas de baisse, par un facteur $\bar{d} < 1$.

La variance \mathbf{s}^2 du rendement de l'actif risqué sur une période se décompose en deux termes tels que : $\mathbf{s}^2 = \mathbf{s}_1^2 + \mathbf{s}_2^2$, où \mathbf{s}_1 (resp. \mathbf{s}_2) est la volatilité du rendement de l'actif prévalant sur la première (resp. seconde) sous période. La variance de l'actif risqué au cours de la première sous période σ_1^2 peut être interprétée comme la variance expliquée par les mouvements des taux.

Les valeurs de \mathbf{s}_1 et \mathbf{s}_2 sont données par :

$$\mathbf{s}_1^2 = q(1-q) \left[\ln \left(\frac{u_i^n}{d_i^n} \right) \right]^2 \quad (6)$$

$$\text{et } \mathbf{s}_2^2 = q'(1-q') \left[\ln \left(\frac{\bar{u}}{\bar{d}} \right) \right]^2 \quad (7)$$

où q et q' désignent respectivement les probabilités réelles de hausse de la structure par terme et de hausse de la composante spécifique de l'actif risqué.

Le coefficient de corrélation \mathbf{r} , entre le rendement de l'actif risqué et le taux d'intérêt sans risque de défaut correspondant à une période, est donné par² :

$$\mathbf{r} = \pm \frac{\mathbf{s}_1}{\mathbf{s}} \quad (8)$$

Originellement, selon Kishimoto, le signe dépend de la corrélation. Si celle-ci est négative alors le signe est -, si elle est positive le signe est +. Par la suite, il est montré que la corrélation peut changer de signe au cours du temps. Aussi, sera-t-il donné une règle permettant de connaître le signe de la corrélation à chaque instant.

En l'absence d'opportunité d'arbitrage entre l'actif risqué et n'importe quelle obligation sans risque de défaut, on vérifie la relation :

$$p u_i^n + (1-p) d_i^n = 1 \quad (9)$$

où p est la probabilité risque neutre de hausse de la structure par terme des zéro-coupons.

On note $S(n,i,j)$ la valeur de l'actif risqué à la date n , après i hausses des taux et j hausses de sa composante spécifique. En résumé, l'actif risqué évolue selon le schéma de la figure 1:

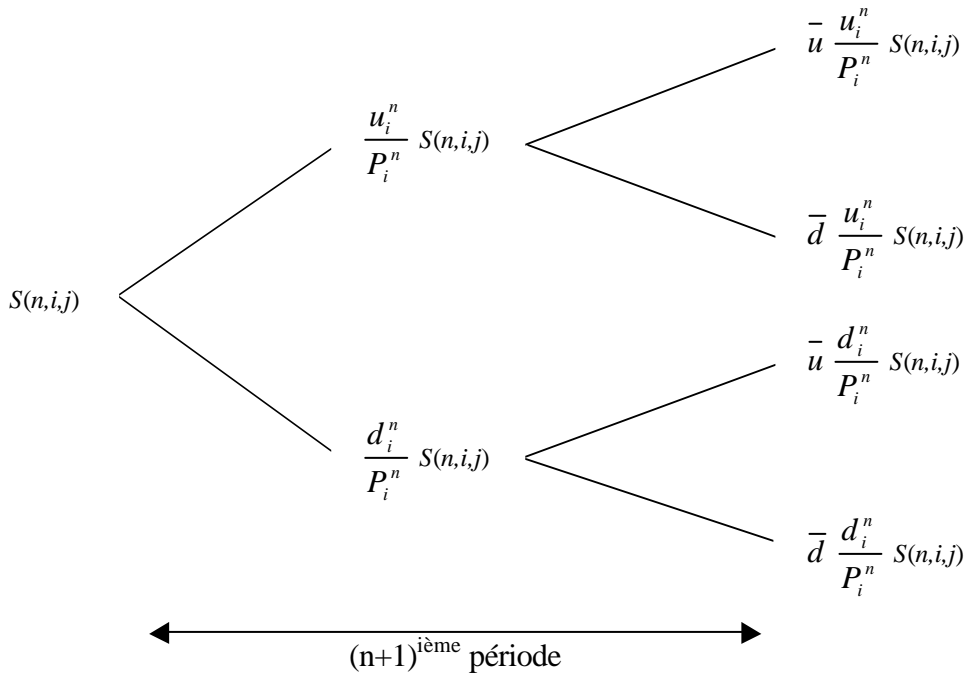


Figure 1

Afin d'éviter une trop grande multiplication des branches de l'arbre, un treillis recombinaut est imposé en retenant le principe d'indépendance du chemin suivi. A cet effet, une hypothèse supplémentaire est donc nécessaire :

H6 : le prix de l'actif à l'instant n est entièrement déterminé par le nombre de hausses de la structure par terme et par le nombre de hausses spécifiques du prix de l'actif qui se sont produites avant l'instant n . Cette hypothèse équivaut à la relation suivante :

$$u_i^n d_{i+1}^{n+1} = u_i^{n+1} d_i^n \frac{\mathbf{d}(n)}{\mathbf{d}(n+1)} \quad (10)$$

H7 : on admet, en outre, que : $u_i^{N-1} = \mathbf{g}$ pour tout $i=0,1,\dots,N-1$, où \mathbf{g} est une constante. Ainsi, pour chaque période, les facteurs u_i^n , notés u^n , représentant la sensibilité du prix de l'actif aux variations des taux d'intérêt, sont indépendants de l'état i de la structure des taux. Cette hypothèse conduit à la relation récurrente suivante :

$$u^{n+1} = \frac{\frac{\mathbf{d}(n+2)}{\mathbf{d}(n+1)} u^n}{1 - \mathbf{p}u^n + \mathbf{p} \frac{\mathbf{d}(n+2)}{\mathbf{d}(n+1)} u^n}$$

L'expression générale définissant le prix de l'actif pour l'état (n, i, j) , donnée par AQ, prend alors la forme suivante :

$$S(n, i, j) = \frac{F(n, i, \mathbf{p}) H(n, j, \bar{u}, \bar{d})}{P(n)} S$$

avec :

$$F(n, i, \mathbf{p}) = \frac{\prod_{k=0}^{i-1} u^k \prod_{k=i}^{n-1} \frac{1 - \mathbf{p}u^k}{1 - \mathbf{p}} \prod_{k=i+1}^{n-1} \mathbf{d}(k)}{h(1, n-1) \dots h(n-1, 1) \mathbf{d}(n)^{n-i-1}}$$

$$H(n, j, \bar{u}, \bar{d}) = \bar{u}^j \bar{d}^{n-j}$$

où S désigne la valeur de l'actif à la date $n=0$.

b. Evaluation d'un actif contingent aux taux et à un seul actif risqué

Au cours d'une période, le prix de l'actif contingent à l'état (n, i, j) , noté $C(n, i, j)$, dont le sous-jacent est l'actif S , évolue selon le schéma suivant :

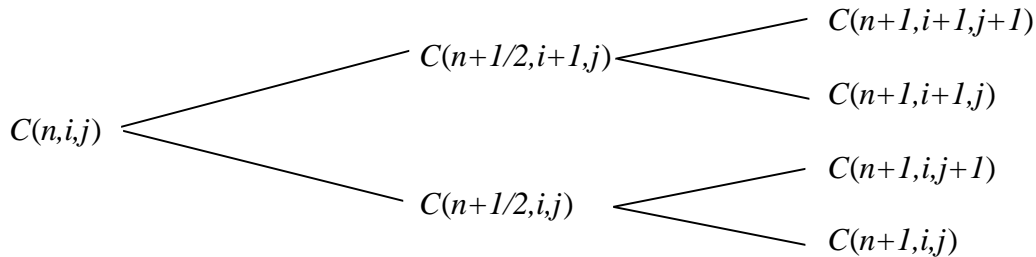


Figure 2

Par un raisonnement d'arbitrage, sur chacune des sous périodes, on obtient la relation définissant le prix de l'actif contingent à la date n à partir de son prix à la date $n+1$; soit :

$$C(n,i,j) = P_i^n [\mathbf{p} p C(n+1,i+1,j+1) + \mathbf{p} (1-p) C(n+1,i+1,j) \\ + (1-\mathbf{p}) p C(n+1,i,j+1) + (1-\mathbf{p}) (1-p) C(n+1,i,j)]$$

où $p = \frac{1-\bar{d}}{u-\bar{d}}$ désigne la probabilité de hausse de la composante spécifique de l'actif, dans l'univers risque neutre³.

Le calage des paramètres de l'approche séquentielle sur des données de marché, proposé par Kishimoto, s'avérant assez sommaire, AQ ont cherché à préciser la méthode d'estimation des paramètres de leur modèle.

Les paramètres \mathbf{p} et $\mathbf{d}(t)$ du modèle de HL généralisé étant estimés par ailleurs, il reste à mesurer la série des u^n et d^n d'une part et les paramètres \bar{u} et \bar{d} d'autre part.

Soit \mathbf{s}_m la volatilité annualisée du rendement de l'actif risqué calculée, à partir des données de marché, sur une courte période précédant l'instant présent. Soit \mathbf{r} le coefficient de corrélation entre le taux d'intérêt à court terme sans risque de défaut et le rendement de l'actif risqué mesuré dans les mêmes conditions. $\mathbf{s}_m^2 \mathbf{D}t$ représente une mesure de \mathbf{s}^2 correspondant à la première période. Comme $\mathbf{r} = \pm \frac{\mathbf{s}_1}{\mathbf{s}}$, AQ en déduisent \mathbf{s}_1 tel que :

$$\mathbf{s}_1 = |\mathbf{r}| \mathbf{s}_m \sqrt{\mathbf{D}t}$$

Sachant, par ailleurs que : $\mathbf{s}^2 = \mathbf{s}_1^2 + \mathbf{s}_2^2$, on en déduit : $\mathbf{s}_2 = \mathbf{s}_m \sqrt{(1-\mathbf{r}^2) \mathbf{D}t}$.

AQ estiment alors $\bar{u} = \exp(\mathbf{s}_2)$ et $\bar{d} = \frac{1}{u}$ de telle sorte qu'en présence de taux d'intérêt constants au cours du temps, on retrouve la valeur d'une option donnée par le modèle de Black et Scholes.

Sous l'hypothèse des anticipations locales, q est égale à π . La valeur initiale u^0 est alors obtenue par la combinaison des formules (6) et (9). Soit :

$$u^0 = \frac{\exp\left(\frac{\mathbf{s}_1}{\sqrt{\mathbf{p}(1-\mathbf{p})}}\right)}{1-\mathbf{p} + \mathbf{p} \exp\left(\frac{\mathbf{s}_1}{\sqrt{\mathbf{p}(1-\mathbf{p})}}\right)}$$

Enfin, à l'aide de la formule (10), on obtient la suite récurrente des u^n .

Malheureusement, comme l'analyse suivante va le révéler, la volatilité \mathbf{s}_1 du modèle varie au cours du temps. Par conséquent, l'hypothèse de l'approche séquentielle d'une volatilité \mathbf{s}_2 constante entraîne également une évolution de \mathbf{s} et de \mathbf{r} dans l'arbre des prix du sous-jacent. Le calage réalisé n'est en fait valable qu'à l'instant 0.

C. Variation de la variance du rendement de l'actif sous-jacent au cours du temps

L'hypothèse de recombinaison de l'arbre conduisant à l'équation (10) implique que s_1 est une fonction de la date n .

Afin de démontrer ce résultat, on se place sous l'hypothèse simplificatrice où la sensibilité du prix de l'actif aux variations de la structure des taux est indépendante du niveau des taux. Les facteurs u_i^n et d_i^n étant alors indépendants de i , l'équation (10) :

$$\frac{u^n}{d^n} = \frac{u^{n+1}}{d^{n+1}} \frac{d(n)}{d(n+1)} \quad (12)$$

Dès lors que les taux sont stochastiques, le rapport $\frac{d(n)}{d(n+1)}$ est différent⁴ de 1 et par conséquent, le rapport $\frac{u^n}{d^n}$ varie au cours du temps. Sous l'hypothèse des anticipations locales, nous avons :

$$s_1^2(n) = p(1-p) \left[\ln \left(\frac{u^n}{d^n} \right) \right]^2 \quad (13)$$

Donc, s_1 ne peut être constante. On note désormais $s_1(n)$ la valeur de s_1 à l'instant n .

Dans le modèle de Kishimoto généralisé, s_2 est supposée constante au cours du temps. La dépendance de s_1 au temps implique que s varie également au cours du temps. Il est donc nécessaire d'écrire :

$$s^2(n) = s_1^2(n) + s_2^2$$

Si les coefficients \bar{u} et \bar{d} sont considérés constants (i.e. $s_2 = \text{constante}$), comme le font Kishimoto et AQ, la volatilité du sous-jacent varie implicitement au cours du temps. La mesure de la volatilité s , effectuée par calage sur les données de marché, ne représente donc que la valeur implicite à l'instant 0. Dans le modèle de Kishimoto, les résultats obtenus sont les mêmes que ceux présentés ici : on aboutit, en effet, aux mêmes conclusions en remplaçant dans les équations le rapport $\frac{d(n+1)}{d(n)}$ par le coefficient δ du modèle de HL.

La figure ci dessous montre l'évolution de s_1 pour trois coefficients de corrélation initiaux différents, en présence d'une structure de volatilité des taux linéairement décroissante avec la maturité.

Volatilité initiale de l'action = 30% Maturité = 10 ans Nombre de périodes = 300
 Volatilité des taux linéairement décroissante avec la maturité de 2% (TJJ) à 0.5% (taux 10 ans)

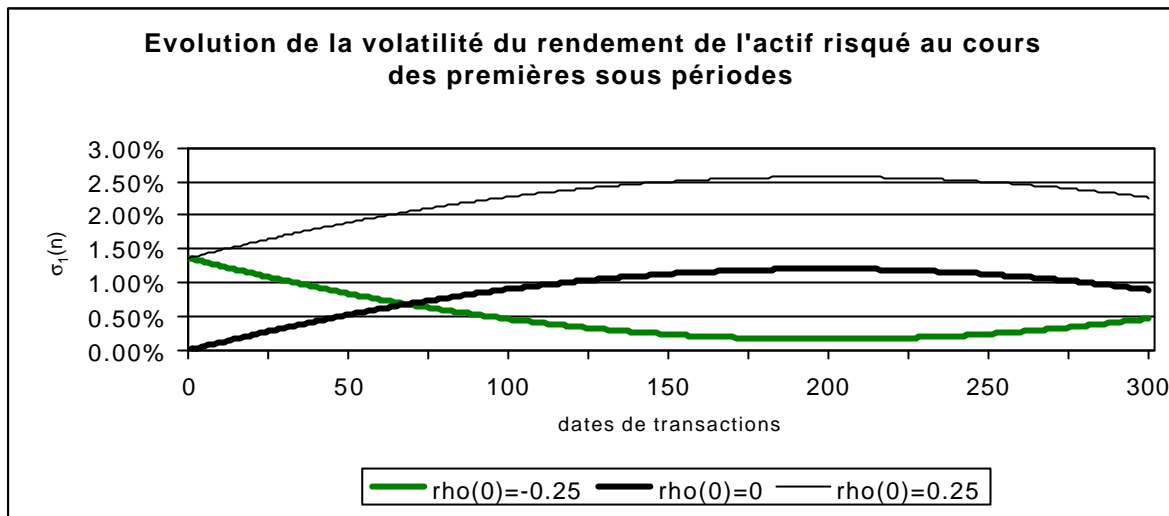


Figure 3

Lorsque le coefficient de corrélation initial est négatif, S_1 a une tendance baissière. Ceci implique que la volatilité totale sur une période a, elle aussi, une tendance baissière. Or, une baisse de la volatilité entraîne une diminution du prix des options vanilles. En conséquence, pour un coefficient de corrélation négatif, le modèle de Kishimoto généralisé a pour effet de sous estimer la valeur du prix de l'option. L'effet contraire se produit avec un coefficient de corrélation positif. D'autres conséquences de l'évolution de la volatilité sont mises en évidence dans les simulations. Les optimums admis par les trois courbes après 179 périodes sont interprétables à partir des équations (6) et (12). Les calculs montrent que le rapport $\frac{d(n)}{d(n+1)}$ franchit la valeur 1 pour cette période. En conséquence, l'évolution du quotient $\frac{u^n}{d^n}$ par rapport au quotient $\frac{u^{n+1}}{d^{n+1}}$ s'inverse ce qui induit un changement de signe de la dérivée de S_1 ().

D. Variation du coefficient de corrélation au cours du temps

Les contraintes du modèle de kishimoto généralisé font que le coefficient de corrélation, r , entre le rendement de l'actif risqué sous-jacent et les taux d'intérêt, varie lui aussi au cours du temps. Afin de proposer une étude simplifiée de ce phénomène, le coefficient de corrélation est directement exprimé en fonction de la structure de volatilité des taux par maturité supposée linéairement décroissante. Les hypothèses de Kishimoto généralisé sont maintenues et notamment, S_2 est supposée constante au cours du temps.

Au cours de chaque période, on a :

$$r = \pm \frac{S_1}{S}$$

La corrélation $r(n)$ au cours de la période allant de n à $n+1$ est égale à :

$$r(n) = \pm \frac{\sqrt{p(1-p)} \ln\left(\frac{u_i^n}{d_i^n}\right)}{\sqrt{p(1-p) \left[\ln\left(\frac{u_i^n}{d_i^n}\right) \right]^2 + s_2^2}}$$

soit en considérant $\pi=0.5$ et u_i^n indépendant de i (Cf. annexe A) :

$$r(n) = \pm \frac{\frac{s_{\text{taux}}(0,1) - (n+1)s_{\text{taux}}(0,n+1)}{n_0^{1.5}} + s_1(0)}{\sqrt{\left[\frac{s_{\text{taux}}(0,1) - (n+1)s_{\text{taux}}(0,n+1)}{n_0^{1.5}} + s_1(0) \right]^2 + s_2^2}}$$

Il convient d'observer que même en choisissant un coefficient de corrélation initial nul, celui-ci évolue au cours du temps. Pour qu'il soit constant, il faudrait que les volatilités des taux soient toutes nulles et donc que la courbe des taux ne subisse aucune déformation. Les graphiques présentés ci-après permettent d'analyser l'évolution de $r(n)$ au cours du temps.

Volatilité initiale de l'action = 30% Coefficient de corrélation initial = -0.25

Maturité = 1 an. Nombre de périodes : 50

Volatilité des taux linéairement décroissante avec la maturité de $x\%$ (TJJ) à $y\%$ (taux 10 ans)

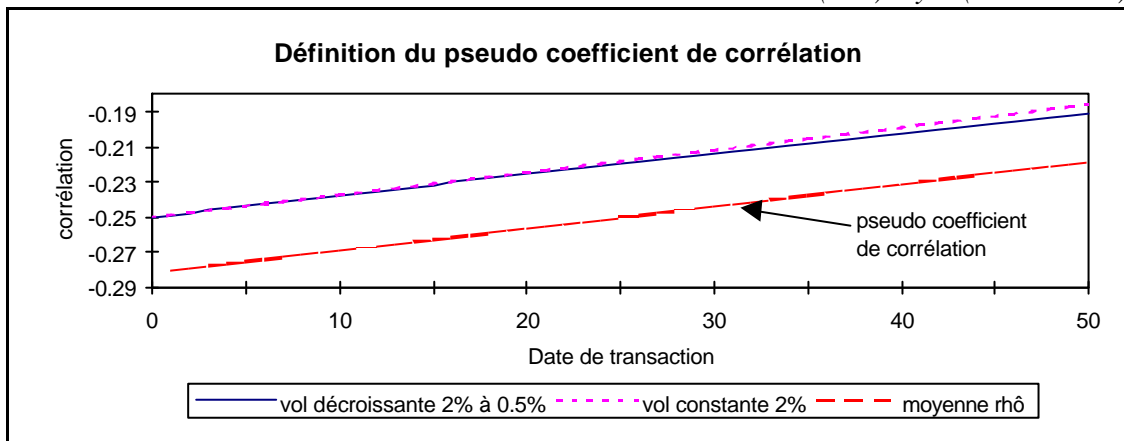


Figure 4

La figure 4 ci dessus révèle, tout d'abord, que l'introduction d'une structure de volatilité des taux décroissante avec la maturité modifie le comportement de $r(n)$ au cours du temps, son évolution étant plus faible qu'en présence d'une volatilité des taux constante quelle que soit la maturité.

Il est intéressant, par ailleurs, de définir le pseudo coefficient de corrélation initial qui permet d'égaliser la moyenne arithmétique des coefficients de corrélation successifs relatifs à chaque période avec la valeur du coefficient de corrélation susceptible d'être estimée avec des données de marché. La courbe d'évolution de ce pseudo coefficient, ou coefficient de corrélation corrigé, est alors presque parallèle à celle obtenue lorsque le coefficient initial correspond à la corrélation estimée. D'un point de vue opérationnel, il semble important de corriger le facteur de corrélation lorsqu'il est négatif, et notamment s'il change de signe au cours du temps ; la quasi-translation des valeurs du coefficient vers le bas pouvant alors éviter ce changement de signe. Une autre justification de ce choix est donnée plus avant.

La figure 5 ci-après permet d'observer l'évolution du coefficient de corrélation pour différentes structures de volatilité des taux.

Volatilité initiale de l'action = 30% Coefficient de corrélation initial = -0.25
 Maturité = 10 ans Nombre de périodes = 50
 Volatilité des taux linéairement décroissante avec la maturité de X% (TJJ) à Y% (taux 10 ans)

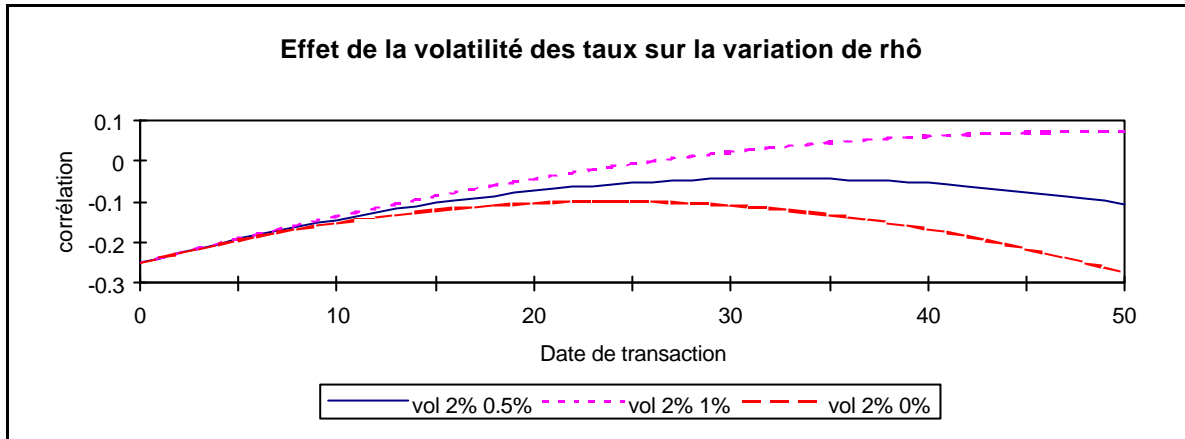


Figure 5

Il ressort que l'introduction d'une structure de volatilité décroissante avec la maturité a pour effet de réduire l'évolution du coefficient de corrélation en tirant ce dernier vers le bas. Il s'agit d'un avantage supplémentaire inattendu de l'implémentation du modèle de HL généralisé, à la place de celui de HL, dans le modèle de Kishimoto. Cet avantage est d'autant plus intéressant que la maturité de l'actif dérivé à évaluer est grande.

Coefficient de corrélation initial = -0.25 Maturité = 10 ans
 Nombre de périodes = 50
 Volatilité des taux linéairement décroissante avec la maturité de 2% (TJJ) à 0.5% (taux 10 ans)

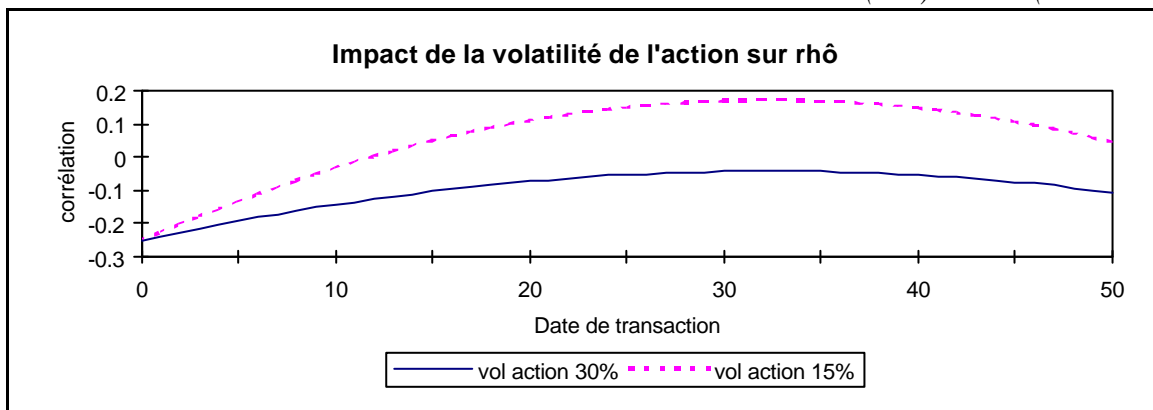


Figure 6

Comme le révèle la figure 6, l'évolution du coefficient de corrélation est d'autant plus forte que la volatilité du rendement de l'action est faible. La formule

$$s_1(n) = \left| \frac{s_{taux}(0,1) - (n+1)s_{taux}(0,n+1)}{n_0^{1.5}} + s_1(0) \right|$$

(Cf. annexe A), permet l'étude de ce phénomène. Pour un $r(0)$ donné, une hausse de $s(n)$ induit celle de $s_1(n)$. Comme par ailleurs la hausse de $s_1(n)$ n'a d'effet que sur $s_1(0)$ et non sur $s_{taux}(.,.)$, le coefficient de corrélation $r(n)$ est d'autant moins sensible à la valeur de $s_{taux}(.,.)$

que la volatilité de l'action est importante. En conséquence, le coefficient de corrélation a une évolution plus faible.

Volatilité initiale de l'action = 30% Coefficient de corrélation initial = -0.25
 Maturité = 10 ans Nombre de périodes = 50
 Volatilité des taux linéairement décroissante avec la maturité de 2% (TJJ) à 0.5% (taux 10 ans)

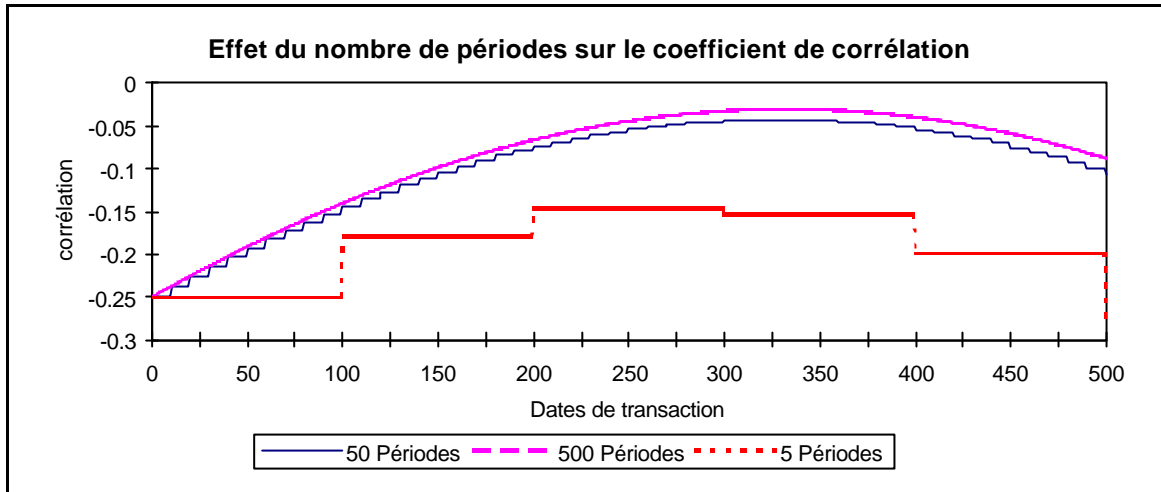


Figure 7

La figure 7 montre la dépendance du coefficient r par rapport au nombre de périodes retenu pour les calculs. En augmentant le nombre de périodes, on s'aperçoit qu'il y a convergence de la courbe vers celle des coefficients de corrélation instantanés implicites au modèle.

Volatilité initiale de l'action = 30% Maturité = 10 ans
 Nombre de périodes = 50
 Volatilité des taux linéairement décroissante avec la maturité de 2% (TJJ) à 0.5% (taux 10 ans)

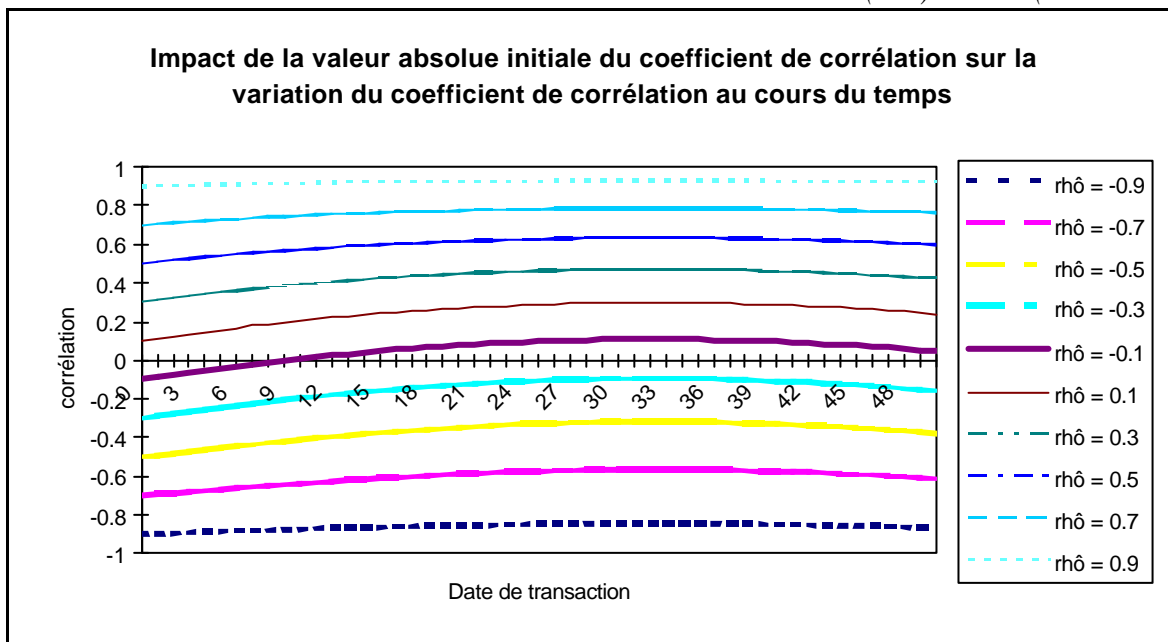


Figure 8

La figure 8 révèle enfin qu'une valeur absolue initiale du coefficient de corrélation faible entraîne une plus forte évolution du coefficient r au cours du temps. Nous trouvons là

une seconde justification de l'utilisation du coefficient de corrélation corrigé lorsque celui-ci est négatif. En effet, le coefficient corrigé étant alors plus fortement négatif, son évolution, comme le risque qu'il devienne positif, sont alors moindres.

Sur cette dernière figure, nous nous apercevons que le coefficient de corrélation peut changer de signe au cours du temps. Pour cette raison, une règle plus précise que celle donnée initialement par Kishimoto permet de connaître le signe de l'expression $r = \pm \frac{s_1}{s}$. Ce signe peut être directement déduit de la valeur des u^n . Si u^n est supérieur à 1 alors une baisse des taux implique une hausse du prix de l'actif risqué, le signe est -, au contraire, si u^n est inférieur à 1 une baisse des taux entraîne une baisse du prix de l'actif risqué, le signe est +. Cette règle s'appliquera de même pour le modèle hexanomial exposé ci dessous.

III. Le modèle hexanomial

L'approche séquentielle précédente est reprise ici mais en y ajoutant une contrainte prévoyant, soit la stabilité de la volatilité du sous-jacent, soit celle du coefficient de corrélation. La présence d'une telle contrainte nécessite un degré de liberté supplémentaire dans la modélisation; aussi est-elle incompatible avec la mise en œuvre du modèle binomial au cours de la seconde sous période. En revanche, elle est possible lorsque l'on substitue le modèle trinomial de Boyle (1986) à celui de CRR.

A. Les contraintes du modèle

a. Contrainte pour avoir une volatilité constante

Il est possible, dans l'approche séquentielle, de relâcher l'hypothèse d'une volatilité spécifique s_2 constante au cours du temps. Dès lors, la valeur de $s_2(n)$ peut être ajustée de façon à stabiliser la volatilité totale s . Sous l'hypothèse que $s^2 \approx s_1^2(n) \forall n$, cet ajustement de $s_2(n)$ est possible. L'hypothèse inverse impliquerait que s_2^2 est négatif.

Pour que $s^2(n+1)$ soit égal à $s^2(n)$, il faut et il suffit que :

$$s_2^2(n+1) = s_2^2(n) + s_1^2(n) - s_1^2(n+1) \quad (14)$$

Ainsi construite, la fonction $s_2(n)$ permet d'avoir une volatilité s du sous-jacent constante au cours du temps.

Sous cette condition, lorsque la volatilité des taux est constante, ρ augmente linéairement et franchit la valeur 1 pour toute maturité supérieure à une maturité donnée. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse $s_1^2(n) < s^2 \forall n$. Aussi, cette dernière hypothèse est une condition nécessaire et suffisante pour que l'ajustement de la volatilité soit possible.

b. Contrainte pour avoir un coefficient de corrélation constant

A présent, nous nous attachons à mettre en évidence les conditions permettant de rendre le coefficient de corrélation constant au cours du temps. Soit r le coefficient de corrélation imposé constant. Nous savons que :

$$r = \pm \frac{s_1}{s}$$

Sous l'hypothèse d'un coefficient r constant, puisque s_1 varie, il est nécessaire que s soit dépendante du temps. Ceci implique la définition d'une fonction de volatilité $s(n)$ pour le sous-jacent.

La fonction $s_2(n)$ permettant d'obtenir un coefficient de corrélation r , supposé non nul, constant au cours du temps est donnée par :

$$\mathbf{s}_2^2(n) = \mathbf{s}_1^2(n) \left(\frac{1}{r^2} - 1 \right) \quad (15)$$

Conformément à la formule (8), pour que le coefficient r soit constamment nul, il est nécessaire que $\mathbf{s}_1(n)$ soit nul $\forall n$ ce qui n'est possible que si la fonction de volatilité des taux est nulle, ou bien si $\mathbf{s}(n)$ est infini.

Remarquons enfin que, dans le cadre de taux d'intérêt stochastiques, les hypothèses d'une fonction de volatilité des taux et d'un coefficient de corrélation constamment nul ne sont pas réalisables simultanément.

Dans, la plupart des cas, il est aussi possible d'intégrer une fonction de volatilité pour l'actif sous-jacent à l'aide d'une fonction de volatilité spécifique $\mathbf{s}_2(n)$. A toute structure de volatilité imposée correspond une nouvelle évolution du coefficient de corrélation.

B. Le modèle trinomial de Boyle

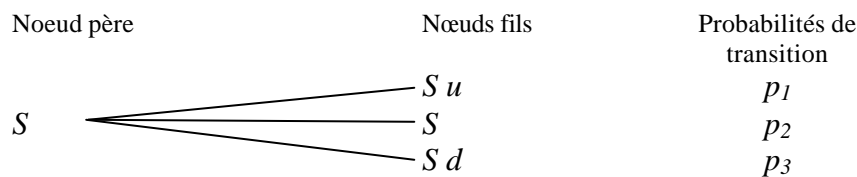
Le modèle d'évaluation d'une option sur un actif risqué de Boyle est proche de celui de CRR. Toutefois, le choix d'un processus discret trinomial, plutôt que binomial, donne un degré de liberté supplémentaire qui permet l'intégration d'une fonction de volatilité par l'ajustement des probabilités. La différence notable entre ces deux méthodes réside dans le fait que celle de Boyle est incomplète. Néanmoins, la convergence mathématique de l'approche trinomial permet son utilisation. L'évaluation du prix d'une option par cette méthode est généralement plus précise que celle obtenue avec le modèle binomial, pour un nombre de périodes de discrétisation équivalent.

Le calcul des probabilités de sauts s'effectue sous les contraintes suivantes :

- respect de l'espérance et de la variance de la distribution continue lognormale des prix ;
- somme des probabilités égale à 1.

Afin de simplifier les notations, on note S la valeur de l'actif risqué et \mathbf{s} la volatilité prévalant au nœud père.

L'approche développée par Boyle peut être représentée, dans l'univers risque neutre, par le schéma suivant :



A l'instar du modèle de CRR, il est préférable, pour que l'arbre soit recombinaut, que les facteurs de hausse et de baisse u et d soient constants au cours du temps.

Le système permettant de calculer les probabilités du processus trinomial pour un nœud quelconque de l'arbre est le suivant :

- respect de l'espérance de la distribution continue lognormale du prix de l'actif :

$$p_1 S u + p_2 S + p_3 S d = S M$$

- respect de la variance :

$$p_1 (S^2 u^2 - S^2 M^2) + p_2 (S^2 - S^2 M^2) + p_3 (S^2 d^2 - S^2 M^2) = S^2 V$$

- Somme des probabilités égale à 1.

où $M = \exp(rDt)$ et $V = M^2 [\exp(s^2 Dt) - 1]$

La résolution du système conduit à :

$$p_1 = \frac{(V + M^2 - M)u - (M - 1)}{(u - 1)(u^2 - 1)} \quad p_2 = 1 - p_1 - p_3 \quad p_3 = \frac{(V + M^2 - M)u^2 - u^3(M - 1)}{(u - 1)(u^2 - 1)}$$

Bien que les probabilités soient ajustées au cours du temps, l'ensemble des contraintes ne permet pas toujours d'obtenir un système de probabilités cohérent pour une période donnée. Boyle, qui suppose une volatilité du rendement de l'actif constante, propose de modifier les coefficients multiplicatifs u et d de CRR de la façon suivante :

$$u = \exp(I \mathbf{s} \sqrt{\Delta t}) \text{ et } d = \frac{1}{u},$$

où la valeur de I est adaptée de telle sorte que le système de probabilités obtenu reste cohérent quelle que soit la période considérée. L'étude menée par Boyle montre que la valeur $I=1,2$ permet généralement d'obtenir des probabilités sensiblement égales, ce qui accroît la vitesse de convergence de la méthode.

Si l'on admet que la volatilité varie au cours du temps, il est nécessaire d'adapter ces facteurs afin de rendre la recherche du paramètre I plus aisée. Pour cela il suffit de prendre comme facteurs multiplicatifs u et d :

$$u = \exp(I \times \text{Max}\{\mathbf{s}(n); n \in 0, \dots, N - 1\} \times \sqrt{Dt}) \quad \text{et} \quad d = \frac{1}{u}.$$

Comme précédemment, la valeur du coefficient I doit être choisie de façon à obtenir un système de probabilité cohérent pour chaque période. Cette fois encore, la valeur $I=1,2$ convient dans la plupart des cas.

L'évaluation de l'actif optionnel est effectuée de manière classique dans l'univers risque neutre.

La figure 9 permet de comparer la convergence de la valeur de l'option donnée par le modèle de Boyle, d'une part, et par celui de CRR, d'autre part, vers celle donnée par le modèle de Black et Scholes (1973), en fonction du nombre de pas de discrétisation. Il ressort que la convergence vers la limite du modèle en temps continu est obtenue avec un nombre de pas beaucoup plus faible avec le modèle trinomial qu'avec le modèle binomial. Le même type de convergence non oscillante est obtenu pour l'approche hexanomiale décrite ci-après.

Call : Maturité = 1 an Prix d'Exercice = 100
 Prix de l'Action = 100 Volatilité = 30% Taux continu annualisé = 5 %

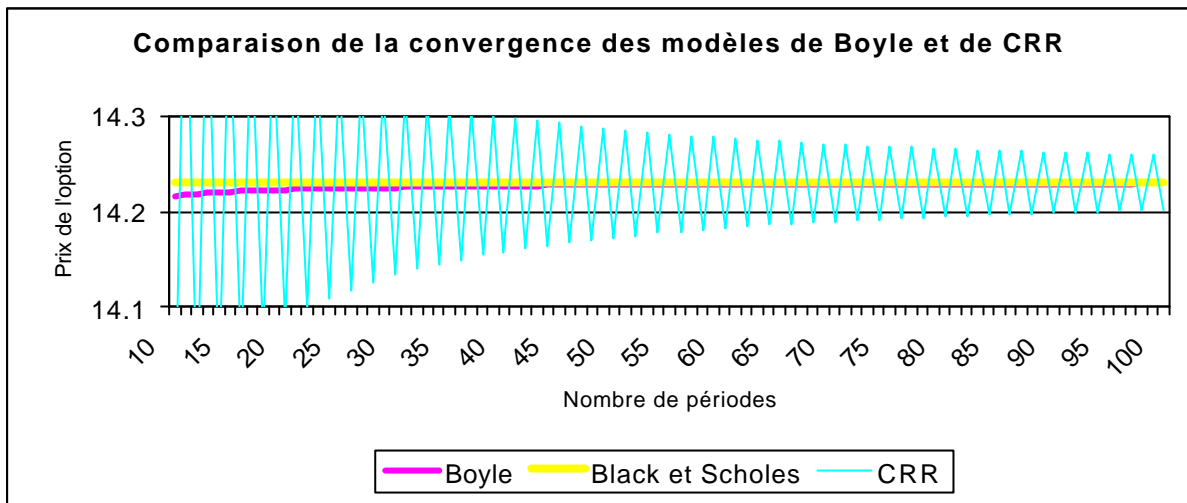


Figure 9

C. L'approche hexanomiale

Les hypothèses H1, H3, H4 et H7 du modèle de Kishimoto généralisé sont reprises ici. Seules les hypothèses H2, H5 et H6 sont remplacées, soit :

H2 : le marché est supposé incomplet et sans friction. Il n'y a ni taxe, ni coût de transaction, ni restriction sur les ventes à découvert. Les actifs sont parfaitement divisibles.

H5 bis : au cours de la seconde sous période, le prix de l'actif évolue selon la méthode trinominale de Boyle. Lorsqu'il y a une hausse (baisse) de la composante spécifique de l'actif risqué, le prix de l'actif est multiplié par le coefficient \bar{u} (\bar{d}). En cas de stabilité de la composante spécifique, le prix de l'actif ne subit aucune variation.

Afin d'obtenir des probabilités cohérentes pour chaque période. Les coefficients \bar{u} et \bar{d} sont pris égaux à :

$$\bar{u} = \exp(I \times \text{MAX}(s_2(n); n \in 0, \dots, N-1)) \text{ et } \bar{d} = \frac{1}{\bar{u}}$$

où le choix de la valeur du coefficient I doit permettre d'obtenir des probabilités cohérentes à chaque période de calcul. Cette fois encore, la valeur $I = 1,2$ satisfait généralement cette contrainte.

Comme dans le modèle de Kishimoto généralisé, l'hypothèse d'absence d'arbitrage entre l'actif risqué et n'importe quelle obligation sans risque de défaut conduit à la relation (9).

On note $S(n,i,j,k)$ la valeur de l'actif risqué à la date n , après qu'il se soit produit i hausses de la structure par terme des taux, j hausses et k baisses de la composante spécifique de l'actif risqué. Partant d'un prix de l'actif risqué égal à $S(n, i, j, k)$, le processus d'évolution du prix peut être représenté, au cours de la $(n+1)^{\text{ième}}$ période, par le schéma suivant :

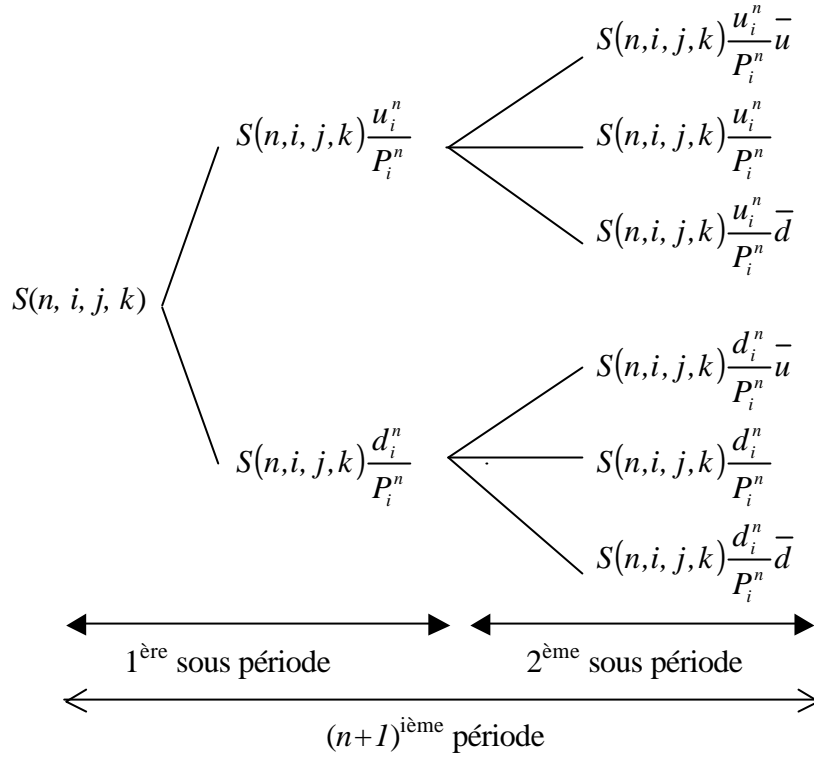


Figure 10

Il convient désormais de calculer les probabilités conditionnelles des sauts du prix de l'actif au cours de la deuxième sous période.

Supposons, par exemple, qu'il y ait eu une hausse des taux au cours de la première sous période. Soient p_1 , p_2 et p_3 les probabilités conditionnelles respectives, dans l'univers risque neutre, d'une hausse, d'une stagnation et d'une baisse de la composante du prix de l'actif risqué au cours de la seconde sous période.

Sachant que le taux sans risque au cours de la seconde sous période est nul, les probabilités de l'approche trinomiale deviennent :

$$p_1 = \frac{Vu}{(u-1)(u^2-1)} \quad p_2 = 1 - p_1 - p_3 \quad p_3 = \frac{Vu^2}{(u-1)(u^2-1)} = p_1 u$$

$$\text{Où : } V = \exp\left(\mathbf{s}_2^2 \mathbf{D}t\right) - 1$$

Il ressort que ces probabilités sont indépendantes de l'évolution des taux au cours de la première sous période. Elles ne dépendent donc que de la date à laquelle elles sont calculées. De ce fait, elles sont identiques qu'il y ait eu une baisse ou une hausse des taux.

Il est nécessaire, par ailleurs, de prendre en compte, pour le calcul de ces probabilités, les contraintes souhaitées par l'utilisateur et, par la même, de retenir pour ce calcul la fonction de volatilité $\mathbf{s}_2(n)$ adaptée à ce choix. Ainsi la relation (14) donne la fonction $\mathbf{s}_2(n)$ permettant d'obtenir une volatilité \mathbf{s} constante au cours du temps. Et la relation (15) donne la fonction $\mathbf{s}_2(n)$ permettant d'obtenir un coefficient \mathbf{r} constant et différent de 0.

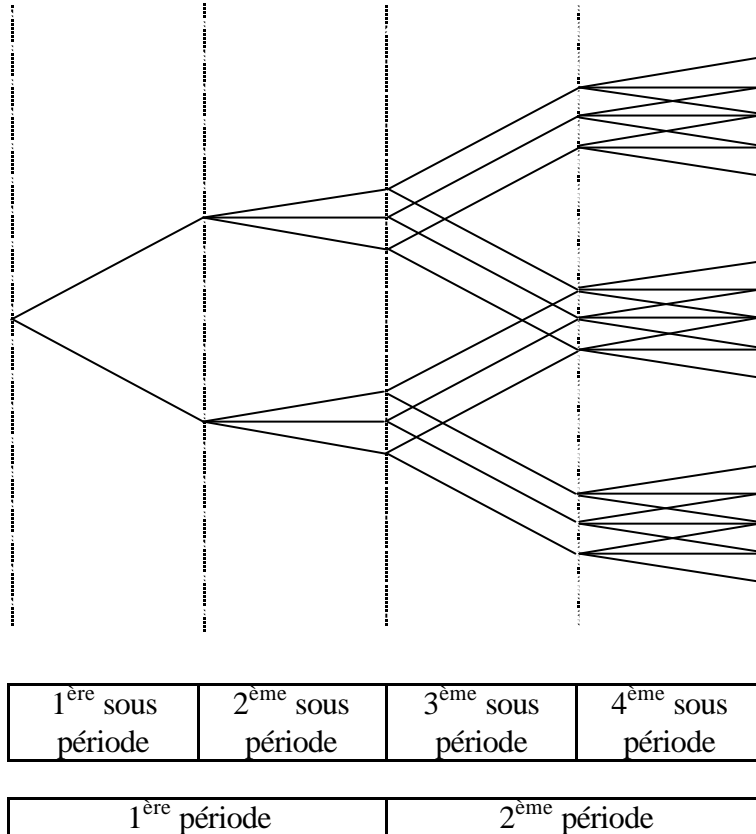
Remarquons que le coefficient de corrélation entre le rendement de l'actif risqué et les taux d'intérêt sans risque a la même forme que dans le modèle de Kishimoto généralisé (Cf. Annexe B) :

$$\mathbf{r} = \pm \frac{\mathbf{s}_l}{\mathbf{s}}$$

Afin que le modèle soit recombinant, il est nécessaire, comme dans le modèle de Kishimoto généralisé, de retenir l'hypothèse suivante :

H6 bis : le prix de l'actif à l'instant n est entièrement déterminé par le nombre de hausses de la structure par terme et par le nombre de hausses et de baisses spécifiques du prix de l'actif qui se sont produites avant l'instant n . Cette hypothèse équivaut à la relation (10) précédente.

Le schéma ci-après illustre l'évolution hexanomiale du prix de l'actif risqué au cours de deux périodes successives.



Le nombre d'états de la nature engendrés est égal à $(2N+1)(N+1)$. Il est donc approximativement le double des $(N+1)^2$ états de la nature des approches séquentielles quadrimomiales.

Les valeurs finales de l'actif risqué sont données par :

$$S(n, i, j, k) = \frac{F(n, i, \mathbf{p}) H(n, j, k, \bar{u}, \bar{d})}{P(n)} S$$

avec :

$$F(n, i, \mathbf{p}) = \frac{\prod_{k=0}^{i-1} u^k \prod_{k=i}^{n-1} \frac{1 - \mathbf{p}u^k}{1 - \mathbf{p}} \prod_{k=i+1}^{n-1} \mathbf{d}(k)}{h(1, n-1) \dots h(n-1, 1) \mathbf{d}(n)^{n-i-1}}$$

$$H(n, j, k, \bar{u}, \bar{d}) = \bar{u}^{-j} \bar{d}^k$$

où S désigne la valeur de l'actif à la date $n=0$.

Signalons que, sous la contrainte d'une volatilité constante, le coefficient de corrélation varie au cours du temps comme dans les modèles de Kishimoto et d'AQ. Pour les structures de volatilité des taux obtenues avec des données de marché, l'évolution obtenue est à peine plus importante que dans AQ mais nettement inférieure à celle observée dans le modèle de Kishimoto.

D. Evaluation d'un actif contingent aux taux et à un seul actif risqué

Au cours d'une période, le prix de l'actif contingent $C(n,i,j,k)$ dans l'état (n,i,j,k) suit le schéma suivant :

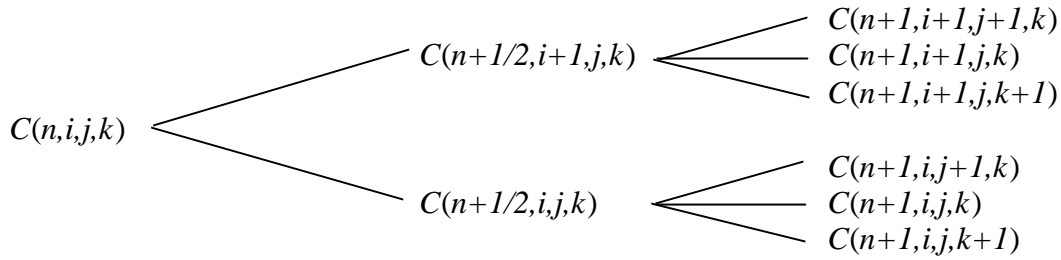


Figure 12

A l'aide d'un portefeuille d'arbitrage, sur la première sous période, puis grâce au modèle trinomial de Boyle, sur la seconde, on obtient, dans l'univers risque neutre, la relation d'évaluation suivante :

$$C(n,i,j,k) = P_i^n [\mathbf{p} p_1 C(n+1,i+1,j+1,k) + \mathbf{p} p_2 C(n+1,i+1,j,k) + \mathbf{p} p_3 C(n+1,i+1,j,k+1) + (1-\mathbf{p}) p_1 C(n+1,i,j+1,k) + (1-\mathbf{p}) p_2 C(n+1,i,j,k) + (1-\mathbf{p}) p_3 C(n+1,i,j,k+1)]$$

E. Simulations

Les résultats de quelques simulations montrant l'apport du modèle hexanomial, dans le cas de l'évaluation d'options européennes à parité, en l'absence de détachement de dividende de l'action sous-jacente, sont d'abord présentés.

La figure 13 montre la convergence de la valeur d'un call sur une action vers sa limite mathématique, à la fois dans le cadre du modèle hexanomial et dans celui de Kishimoto généralisé, lorsque aucune contrainte n'est imposée quant à la stabilisation du coefficient de corrélation ou de la variance.

L'évaluation par l'approche hexanomiale apparaît plus stable que l'approche quadrimomiale. Ce résultat s'explique principalement par le fait que la variance du rendement du prix de l'actif risqué ne converge qu'à la limite, lorsque N tend vers l'infini, vers la variance du processus continu. De plus, tandis que les approches séquentielles de Kishimoto et Kishimoto généralisé ne convergent que par vague vers leurs limites, la stabilité de la convergence du modèle hexanomial constitue un avantage indéniable.

Call : cours de l'action = 100 Volatilité = 30% Corrélation = -0,2
 Prix d'exercice = 100 Maturité = 1 an
 Taux continu annualisé = 5% Volatilité des taux linéaire de 3% (TJJ) à 2,5% (taux 1 an)

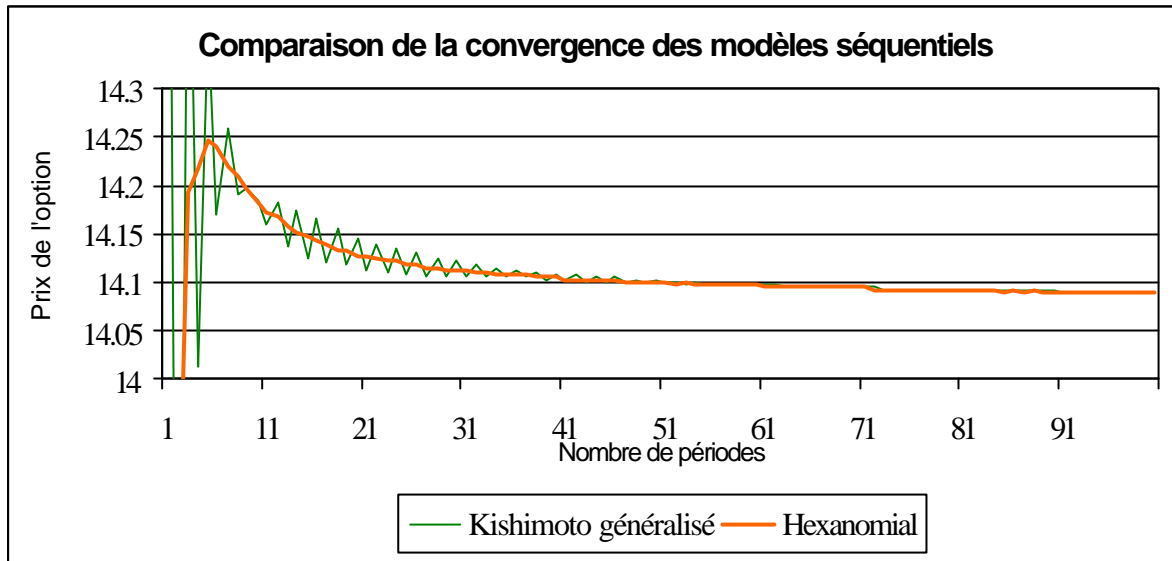


Figure 13

A présent, nous imposons les contraintes nécessaires et suffisantes permettant d'obtenir alternativement une volatilité du sous-jacent constante et un coefficient de corrélation constant au cours du temps. Ces résultats sont comparés à ceux obtenus, à partir des mêmes paramètres, avec le modèle hexanomial non contraint. Le nombre de périodes de discrétisation considéré est égale à 100. Plusieurs valeurs du coefficient de corrélation et de la volatilité sont envisagées.

	Non contraint (a)	Volatilité constante (b)	Corrélation constante (c)
Corrélation : -0,7, Volatilité : 20 %	9.84	10.18 $b > a$	9.46 $c < a$
Corrélation : -0,7, Volatilité : 50 %	21.16	21.51 $b > a$	20.79 $c < a$
Corrélation : -0,3, Volatilité : 20 %	10.23	10.36 $b > a$	8.77 $c < a$
Corrélation : -0,3, Volatilité : 50 %	21.55	21.69 $b > a$	20.05 $c < a$
Corrélation : 0,3, Volatilité : 20 %	10.78	10.62 $b < a$	12.29 $c > a$
Corrélation : 0,3, Volatilité : 50 %	22.11	21.95 $b < a$	23.61 $c > a$
Corrélation : 0,7, Volatilité : 20 %	11.13	10.79 $b < a$	11.48 $c > a$
Corrélation : 0,7, Volatilité : 50 %	22.46	22.11 $b < a$	22.81 $c > a$

Tableau 1

Les conséquences sur la volatilité de la contrainte imposée au modèle pour avoir un coefficient de corrélation constant sont telles que les valeurs obtenues avec le modèle hexanomial peuvent, pour un coefficient de corrélation faible en valeur absolue, être très différentes de celles fournies par le modèle de Kishimoto généralisé. Pour un coefficient de corrélation négatif, la valeur obtenue est inférieure à celle de Kishimoto généralisé alors que, pour un coefficient de corrélation positif, c'est l'inverse.

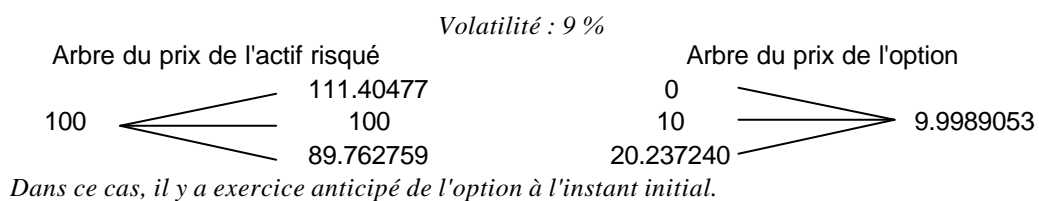
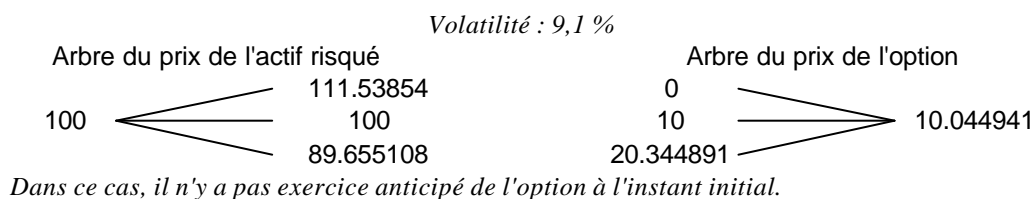
A l'inverse, la contrainte imposée pour maintenir la volatilité du sous-jacent constante a davantage d'effet sur la valeur de l'option lorsque le coefficient de corrélation est élevé en valeur absolue. Rappelons qu'en présence d'une corrélation négative la volatilité du sous-jacent a une tendance baissière (cf figure 3). De ce fait, si l'on contraint la volatilité à rester constante, la valeur obtenue est supérieure à celle fournie par le modèle en l'absence de contrainte. On constate naturellement le phénomène inverse lorsque le coefficient de corrélation est positif.

Selon les produits dérivés évalués, les conséquences induites par l'évolution des paramètres changent. En effet, il est connu que pour les options à barrière, par exemple du type call up and out, une augmentation de la volatilité du rendement de l'actif risqué n'implique pas forcément une augmentation du prix de l'option comme tel est le cas pour les calls vanille. Une hausse de la volatilité impliquant une augmentation de la probabilité d'atteinte de la barrière désactivante. De ce fait, l'introduction d'une barrière dans le modèle de Kishimoto généralisé n'aura pas toujours la même influence sur le prix de l'option calculée. Par ailleurs, si l'option présente un caractère américain, la baisse ou la hausse de la volatilité du rendement de l'actif risqué peut conduire lors de l'induction arrière de l'arbre des prix de l'option à des exercices anticipés locaux injustifiés si la volatilité était maintenue constante.

L'exemple suivant illustre l'influence de la volatilité sur d'éventuels exercices anticipés pour le prix d'un put américain. L'exemple est restreint dans le cas d'un arbre trinomial par soucis de synthèse du phénomène. Il est immédiatement extensible aux modèles séquentiels.

Données initiales :

Put américain Cours de l'action = 100 Prix d'exercice = 110
Maturité = 1 an Taux continu annualisé = 5% Nombre de périodes : 1



Outre la modification des prix théoriques, les sensibilités calculées sont naturellement, elles aussi, modifiées par l'introduction d'une contrainte sur le coefficient de corrélation ou sur la variance.

L'effet de l'évolution du coefficient de corrélation étant relativement négligeable par rapport à celui de l'évolution de la volatilité du sous-jacent, il semble préférable de privilégier le choix d'une volatilité constante.

IV. Comparaison avec le modèle de Merton

Connaissant les évolutions simultanées de la volatilité et du coefficient de corrélation, il est désormais possible de mettre en évidence la convergence numérique de l'approche séquentielle vers le modèle de Merton (une preuve de la convergence mathématique des approches séquentielles vers le modèle de Black et Scholes est apportée en annexe C).

Toutefois, compte tenu des remarques précédentes, la comparaison est volontairement restreinte à l'approche hexanomiale avec une volatilité constante.

Merton suppose que les dynamiques du prix de l'action et du zéro-coupon sont représentées par deux mouvements browniens géométriques :

$$\frac{dS}{S} = \mathbf{m}t + \mathbf{s}(t)dZ(t) \qquad \frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = \mathbf{a}(t)dt - \mathbf{d}(t)dZ'(t)$$

avec $dZ(t).dZ'(t) = -k(t)dt$.

Où : S désigne la valeur de l'action sous-jacente, t la date présente, $P(t, T)$ le prix en t d'un zéro-coupon d'échéance T de maturité $t = T-t$, \mathbf{m} et $\mathbf{s}(t)$ la dérive et la volatilité instantanée du rendement de l'action, $\mathbf{a}(t)$ et $\mathbf{d}(t)$ la dérive et la volatilité instantanée du rendement du zéro coupon $P(t, T)$, $k(t)$ le coefficient de corrélation instantané entre les rendements non anticipés de S et de $P(t,T)$, $Z(t)$ et $Z'(t)$ deux processus de Wiener standards sous la probabilité réelle.

$\mathbf{s}(t)$, $\mathbf{d}(T-t)$, $k(t)$ sont des fonctions déterministes de t .

La formule d'évaluation d'une option européenne sur action, proposée par Merton (1973), s'écrit :

$$\left. \begin{aligned} C &= S(t)N(d_1) - KP(t,T)N(d_2) \\ \text{avec } d_1 &= \frac{\text{Log} \frac{S(t)}{KP(t,T)} + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{s}}^2 t}{\hat{\mathbf{s}} \sqrt{t}}, d_2 = d_1 - \hat{\mathbf{s}} \sqrt{t} \\ \text{et } \hat{\mathbf{s}}^2 &= \frac{1}{t} \int_t^T (\mathbf{s}^2(u) + \mathbf{d}^2(u)(t-u)^2 - 2k(u)\mathbf{s}(u)\mathbf{d}(u)(t-u)) du \end{aligned} \right\}$$

où : K le prix d'exercice de l'option et $N(.)$ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Lorsque la structure de volatilité du rendement du zéro coupon $P(t, T)$ est linéaire avec la maturité, (ou lorsqu'elle varie de manière exponentielle avec la maturité), le taux à court terme présente alors la particularité d'être markovien.

Par exemple, dans le cas d'une structure linéaire où $\mathbf{d}(T-t) = \delta \times (T-t)$, avec $\delta = \text{constante}$, le taux instantané suit la diffusion suivante :

$$dr = [f_r(s,t) + \mathbf{d}^2(t-s)]dt + \mathbf{d}d\hat{Z}(t)$$

où $f(s,t)$ désigne le taux instantané forward en s pour la date t , $f_r(s,t)$ la dérivée par rapport à t de $f(s,t)$ et où $\hat{Z}(t)$ est un brownien standard dans l'univers risque neutre.

$-k(t)$ représente alors le coefficient de corrélation entre le rendement non anticipé de l'action et les variations du taux sans risque instantané. Le processus de taux correspond ici à la version continue du modèle discret de HL. Tous les taux ont la même volatilité quelle que soit la maturité à laquelle ils se rapportent.

La comparaison des modèles est proposée dans le cas particulier suivant :

- Modèle hexanomial avec : volatilité du sous-jacent maintenue constante et égale à \mathbf{s} ; volatilité des taux constante égale à \mathbf{d} ; le coefficient de corrélation $\mathbf{r}(t)$ entre le rendement de l'actif risqué et les taux d'intérêt sans risque s'identifie avec $-k(t)$. On montre facilement que \mathbf{r} représente également le coefficient de corrélation entre le rendement de l'actif risqué et les variations des taux d'intérêt.

- Modèle de Merton : volatilité \mathbf{s} du sous-jacent constante ; volatilité des taux constante égale à \mathbf{d} ; la fonction $k(t)=-\mathbf{r}(t)$ est celle observée dans le cadre du modèle hexanomiel.

Il vient :

$$\hat{\mathbf{s}}^2 = \mathbf{s}^2 + \mathbf{d}^2 \frac{\mathbf{t}^2}{3} - 2 \frac{\mathbf{s}\mathbf{d}}{\mathbf{t}} \int_0^{\mathbf{t}} k(u)(\mathbf{t}-u)du$$

Les valeurs de $\mathbf{r}(n)$ étant discrète, une intégration numérique est utilisée pour résoudre l'intégrale $\int_0^{\mathbf{t}} k(u)(\mathbf{t}-u)du$:

$$\int_0^{\mathbf{t}} k(u)(\mathbf{t}-u)du = \sum_{i=0}^{n-1} k(i) \left[\mathbf{t}D_i - iD_i^2 - \frac{1}{2} D_i^2 \right] = \mathbf{t}^2 \sum_{i=0}^{n-1} k(i) \left[\frac{1}{n} - \frac{i}{n^2} - \frac{1}{2n^2} \right]$$

Enfin, en remplaçant $k(i)$ par $-\rho(i)$, on obtient pour $\hat{\mathbf{s}}^2$:

$$\hat{\mathbf{s}}^2 = \mathbf{s}^2 + \mathbf{d}^2 \frac{\mathbf{t}^2}{3} - \mathbf{s}\mathbf{d}\mathbf{t}k_1$$

$$\text{où } k_1 = -2\mathbf{r}_{\text{moy}} + 2 \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{r}(i) \frac{i}{n^2} + \frac{1}{n} \mathbf{r}_{\text{moy}} \text{ et } \mathbf{r}_{\text{moy}} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{r}(i).$$

Le lien, entre le modèle hexanomiel avec volatilité constante et le modèle de Merton, étant établi, il est désormais possible de comparer numériquement les valeurs obtenues à l'aide de ces deux approches.

Le tableau 2 ci dessous montre, à l'aide de quelques exemples, que les résultats fournis par le modèle hexanomiel avec volatilité constante converge numériquement vers ceux donnés par le modèle de Merton. De toute évidence, cette comparaison pourrait aussi être étendue aux modèles de Kishimoto et de Kishimoto généralisé, à condition toutefois de recalculer le terme $\hat{\mathbf{s}}^2$ en tenant compte des fonctions de volatilité et de corrélation implicites à ces deux modèles.

Call : cours de l'action sous-jacente = 100 ; taux annuel continu = 5% ;

K = prix d'exercice ; \mathbf{s}_{taux} = volatilité constante des taux ; \mathbf{s} = volatilité constante de l'action et \mathbf{t} = maturité de l'option.

corrélation initiale	K	σ_{taux}	σ	τ	k_1	Hexanomiel volatilité constante	Merton
-0.5	120	0.01	0.4	0.5	0.496	5.48	5.48
-0.5	120	0.03	0.15	4	0.235	12.86	12.86
-0.5	120	0.03	0.4	4	0.401	30.36	30.34
-0.3	80	0.03	0.15	0.5	0.267	22.00	22.00
-0.3	100	0.03	0.4	4	0.201	37.77	37.77
-0.3	100	0.05	0.4	4	0.135	38.38	38.37
-0.1	100	0.01	0.4	4	0.067	38.13	38.12
-0.1	120	0.03	0.15	4	-0.165	14.57	14.58
0.1	80	0.05	0.4	0.5	-0.121	24.60	24.60
0.1	100	0.03	0.15	4	-0.365	24.21	24.22
0.3	100	0.01	0.15	4	-0.388	22.73	22.74
0.3	120	0.03	0.4	0.5	-0.312	5.57	5.57
0.5	100	0.03	0.4	0.5	-0.512	12.50	12.49
0.5	80	0.05	0.4	0.5	-0.521	24.69	24.69

Tableau 2

Il convient de souligner que les approches séquentielles présentent un champ d'application plus général que le modèle de Merton en autorisant, notamment, l'évaluation d'actifs optionnels de type américain. Toutefois, l'évolution de la volatilité conjuguée à celle du coefficient de corrélation, peut présenter un inconvénient pour la prise en compte du caractère américain de ces actifs. La méthode hexanomiale, en permettant soit d'imposer une volatilité constante soit d'intégrer un *smile* de volatilité par maturité conforme aux données de marché, présente un avantage certain par rapport aux approches séquentielles quadrimiales antérieures.

V. Conclusion

Cet article a permis de mettre en évidence le principal inconvénient des méthodes séquentielles de Kishimoto et de Kishimoto généralisée. Dans ces approches, en effet, la volatilité du rendement de l'actif risqué ainsi que le coefficient de corrélation entre le rendement de l'actif et les taux évoluent au cours du temps. Cette évolution est implicite au modèle et elle ne repose sur aucun fondement économique. Une correction importante de ce phénomène a été proposée grâce à l'introduction d'une séquence trinomiale, au cours de la seconde sous période, qui permet d'ajuster l'évolution de la volatilité où celle du coefficient de corrélation. L'adoption d'une fonction de volatilité du sous-jacent constante au cours du temps, ou conforme aux données de marché, semble être le meilleur choix à considérer pour l'évaluation des actifs à caractère optionnel. Dans cette hypothèse, et pour les conditions de marché, l'évolution du coefficient de corrélation est quasiment inchangée par rapport à celle observée dans le modèle de Kishimoto généralisé. La convergence de l'approche séquentielle hexanomiale proposée vers le modèle de Merton a pu être mise en évidence dans le cas où la volatilité de l'actif sous-jacent est maintenue constante au cours du temps. La méthode hexanomiale présente, en outre, l'avantage de permettre l'évaluation d'un actif dérivé de type américain. Enfin, en suivant la démarche d'Augros et Quérue, il est possible d'étendre cette approche à l'évaluation d'un actif contingent à plusieurs actifs sous-jacents.

ANNEXES

Annexe A: Calcul du coefficient de corrélation pour une fonction linéaire décroissante de la structure de volatilité des taux.

Au préalable, prouvons qu'il existe une relation simple entre u^n et u^0 :

$$\text{Nous savons en effet que : } u^{n+1} = \frac{\frac{d(n+2)}{d(n+1)}u^n}{1 + p \frac{d(n+2)}{d(n+1)}u^n - pu^n}$$

Si l'un des u^i était nul alors ses suivants le seraient aussi. Ceci aurait pour conséquence d'engendrer des valeurs du prix du sous-jacent nulles. Aussi nous supposons que u^n est non nul, quel que soit n .

L'équation précédente s'écrit aussi :

$$u^{n+1} = \frac{d(n+2)}{\frac{d(n+1)}{u^n} + pd(n+2) - pd(n+1)}$$

Une récurrence nous permet d'en déduire la relation simple suivante :

$$u^{n+1} = \frac{d(n+2)}{\frac{d(I)}{u^0} + pd(n+2) - pd(I)}$$

Etablissons à présent la relation liant le coefficient de corrélation à la structure de volatilité des taux. Au cours de chaque période, on a : $r = \pm \frac{s_1}{s}$. Notons $\rho(n)$ la corrélation au cours de la période allant de n à $n+1$.

$$\text{Sous l'hypothèse des anticipations locales, } s_1^2(n) = p(1-p) \left[\ln \left(\frac{u^n}{d^n} \right) \right]^2$$

$$\text{Calculons le terme logarithmique : } \ln \left(\frac{u^n}{d^n} \right)$$

$$\begin{aligned} &= \ln \left(\frac{u^n}{2-u^n} \right) = \ln \left(\frac{1}{\frac{2}{d(n+1)} \left[\frac{d(I)}{u^0} + pd(n+1) - pd(I) \right] - 1} \right) = \ln \left(\frac{d(n+1)}{2 \left[\frac{d(I)}{u^0} - 0.5d(I) \right]} \right) \\ &= \frac{-(n+1)s_{taux}(0, n+1)}{n_0^{1.5}/2} - \ln \left(2 \left(\frac{d(I)}{u^0} - 0.5d(I) \right) \right) = \frac{s_{taux}(0,1) - (n+1)s_{taux}(0, n+1)}{n_0^{1.5}/2} - \ln \left(\frac{2}{u^0} - 1 \right) \\ &= \frac{s_{taux}(0,1) - (n+1)s_{taux}(0, n+1)}{n_0^{1.5}/2} + 2s_1(0) \end{aligned}$$

d'où, en considérant $\pi = 0,5$,

$$s_1(n) = \left| \frac{s_{taux}(0,1) - (n+1)s_{taux}(0, n+1)}{n_0^{1.5}} + s_1(0) \right|$$

$$\frac{s_{taux}(0,1) - (n+1)s_{taux}(0, n+1)}{n_0^{1.5}} + s_1(0)$$

$$\text{et donc, } r(n) = \pm \frac{\frac{s_{taux}(0,1) - (n+1)s_{taux}(0, n+1)}{n_0^{1.5}} + s_1(0)}{\sqrt{\left[\frac{s_{taux}(0,1) - (n+1)s_{taux}(0, n+1)}{n_0^{1.5}} + s_1(0) \right]^2 + s_2^2}}$$

Annexe B : Calcul de la corrélation entre le rendement X de l'actif et les taux d'intérêt Y sans risque :

$$\text{On définit les deux variables X et Y par : } X = \ln \left(\frac{S(n+1, \dots)}{S(n, i, j)} \right) \text{ et } Y = -\ln P^{n+1}$$

$$\text{Par définition, la corrélation } r_{X,Y} \text{ est donnée par : } r_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{s_X s_Y} = -\frac{\text{Cov}(X,-Y)}{s_X s_Y}$$

où σ_X (resp σ_Y) désigne l'écart type sur la période $[n, n+1]$ de la variable X (resp Y).

L'espérance de la valeur en fin de période du taux sans risque de maturité une période, est égale à :

$$E(-Y) = q \ln P_{i+1}^{n+1} + (1-q) \ln P_i^{n+1}$$

L'espérance du rendement de l'actif risqué sur la période $[n, n+1]$ est donnée par :

$$E(X) = qp_1 \ln \left(\frac{-u_i^n}{P_i^n} \right) + qp_2 \ln \left(\frac{u_i^n}{P_i^n} \right) + qp_3 \ln \left(\frac{-u_i^n}{P_i^n} \right)$$

$$+(1-q)p_1 \ln \left(\frac{-d_i^n}{P_i^n} \right) + (1-q)p_2 \ln \left(\frac{d_i^n}{P_i^n} \right) + (1-q)p_3 \ln \left(\frac{-d_i^n}{P_i^n} \right)$$

En décomposant en somme de logarithmes les logarithmes de produit et en remplaçant p_2 par $1-p_1-p_3$ puis en regroupant les termes, il vient :

$$E(X) = p_1 \ln \bar{u} + p_3 \ln \bar{d} + q \ln \left(\frac{u_i^n}{P_i^n} \right) + (1-q) \ln \left(\frac{d_i^n}{P_i^n} \right)$$

Le calcul de l'espérance du produit $-XY$ conduit à la formule suivante :

$$E(-XY) = p_1 q \ln \bar{u} \ln P_{i+1}^{n+1} + q \ln \frac{u_i^n}{P_i^n} \ln P_{i+1}^{n+1} + p_3 q \ln \bar{d} \ln P_{i+1}^{n+1} \\ p_1 (1-q) \ln \bar{u} \ln P_i^{n+1} + (1-q) \ln \frac{d_i^n}{P_i^n} \ln P_i^{n+1} + p_3 (1-q) \ln \bar{d} \ln P_i^{n+1}$$

Après arrangement des termes, on obtient la valeur de la covariance entre X et Y :

$$Cov(X, -Y) = q(1-q) \ln \left(\frac{u_i^n}{P_i^n} \right) \left[\ln P_{i+1}^{n+1} - \ln P_i^{n+1} \right] + q(1-q) \ln \left(\frac{d_i^n}{P_i^n} \right) \left[-\ln P_{i+1}^{n+1} + \ln P_i^{n+1} \right]$$

Il reste à calculer la volatilité de la variable $-Y$ ou Y , il vient :

$$s_Y^2 = q(1-q) \left[\ln P_{i+1}^{n+1} - \ln P_i^{n+1} \right]^2$$

$$\text{d'où, } Cov(X, -Y) = \frac{\sqrt{q(1-q)} \ln \frac{u_i^n}{d_i^n}}{s_X}$$

$$\text{et donc, } r = \pm \frac{s_1}{s}$$

On retrouve donc bien la même relation pour le coefficient de corrélation que Kishimoto et AQ. Les valeurs σ et σ_1 étant toujours positives, il est nécessaire d'introduire le signe \pm permettant d'avoir des corrélations des 2 signes.

Annexe C : Convergences

Dans sa thèse, Kishimoto démontre que, sous l'hypothèse d'un taux d'intérêt constant, le modèle de CRR est un cas particulier de son modèle. Nous démontrons dans un premier temps que ce n'est pas le cas. Dans un second temps, les preuves suffisantes permettant de vérifier la convergence du modèle de Kishimoto vers le modèle de Black et Scholes (BS - 1973) sont apportées.

On suppose que le taux sans risque instantané r est constant au cours du temps. Les prix zéro-coupons P_i^n sont donc indépendants de i et de n . Ils sont notés P . Il est facile de montrer que les coefficients u^n sont tous égaux à 1.

Dans ce cas, le processus discret quadrinomial du prix S de l'actif risqué au cours d'une période est similaire au processus binomial suivant (appelé CRR adapté par la suite) :

- en cas de hausse, le prix est égal à : $S \frac{u}{P} = S e^{r\Delta t} e^{s\sqrt{\Delta t}}$;
- en cas de baisse, le prix est égal à : $S \frac{d}{P} = S e^{r\Delta t} e^{-s\sqrt{\Delta t}}$.

A moins de supposer le taux sans risque r nul, le processus d'évolution du prix de l'actif risqué sous-jacent est différent de celui de CRR. C'est pourquoi, le modèle de Kishimoto ne constitue pas une généralisation du modèle de CRR.

La démonstration de la convergence du modèle de CRR adapté peut s'effectuer de la même manière que celle proposée par CRR. La preuve apportée ici n'est donc que partielle et reprend celle donnée par CRR. Elle a pour but de montrer que le modèle de CRR adapté vérifie les contraintes suffisantes des théorèmes mis en œuvre par CRR pour démontrer la convergence du modèle vers celui de BS.

On note $q = \frac{1 - e^{-s\sqrt{\Delta t}}}{e^{s\sqrt{\Delta t}} - e^{-s\sqrt{\Delta t}}}$ la probabilité de hausse de l'actif risqué dans l'univers risque neutre au cours d'une période (cette probabilité est la même que pour l'approche quadrinomiale). Les coefficients $\frac{\bar{u}}{P}$ et $\frac{\bar{d}}{P}$ du modèle séquentiel sont respectivement notés u' et d' . Soit S^* une valeur possible de l'actif risqué après n périodes.

Il est aisé de vérifier que le modèle adapté vérifie :

$$E\left[\log\left(\frac{S^*}{S}\right)\right] = \left[q \log\left(\frac{u'}{d'}\right) + \log d'\right]n = \hat{m} \quad \text{Var}\left[\log\left(\frac{S^*}{S}\right)\right] = q(1-q)\left[\log\left(\frac{u'}{d'}\right)\right]^2 n = \hat{s}^2 n$$

Pour que la convergence soit assurée, il est nécessaire que :

$$\left. \begin{array}{l} \left[q \log\left(\frac{u'}{d'}\right) + \log d'\right]n \rightarrow \mathbf{m} \\ q(1-q)\left[\log\left(\frac{u'}{d'}\right)\right]^2 n \rightarrow \mathbf{s}^2 t \end{array} \right\} \text{lorsque } n \rightarrow \infty.$$

où \mathbf{m} et \mathbf{s} sont respectivement la dérive et la volatilité du processus de diffusion de l'actif risqué sous-jacent. On rappelle que : $\mathbf{m} = r - 1/2 \mathbf{s}^2$.

A l'aide de développements limités, on vérifie que les paramètres :

$$u' = e^{r\Delta t + s\sqrt{\Delta t}} \quad d' = e^{r\Delta t - s\sqrt{\Delta t}} \quad q = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} s \sqrt{\Delta t}$$

permettent d'obtenir pour tout n (suffisamment grand pour assurer l'existence de q) :

$$\hat{m} = \mathbf{m} \quad \text{et} \quad \hat{s}^2 n = \mathbf{s}^2 \left[1 - \frac{\mathbf{s}^2}{4n}\right]t$$

Et par conséquent, lorsque $n \rightarrow \infty$, $\hat{m} = \mathbf{m}$ et $\hat{s}^2 n = \mathbf{s}^2 t$.

Par ailleurs, lorsque $n \rightarrow \infty$, la probabilité q vaut 1/2 et aucun phénomène d'absorption n'en résulte.

A présent, en vérifiant les conditions de Liapunov à l'ordre 3, on peut appliquer le théorème central limite qui permet d'assurer la convergence suivante lorsque $n \rightarrow \infty$:

$$\text{Prob}\left\{\frac{\log\left(\frac{S^*}{S}\right) - \hat{m}}{\hat{s}\sqrt{n}} \leq z\right\} \rightarrow N(z)$$

Les autres résultats nécessaires à la démonstration de la convergence ne dépendent pas spécifiquement des coefficients u' et d' et ils sont directement applicables à l'approche.

L'ensemble de ces résultats permet donc d'assurer la convergence de l'approche de Kishimoto vers le modèle de BS. Il est plus facile encore de montrer la convergence du modèle hexanomial vers le modèle de BS. En effet, sous l'hypothèse d'un taux d'intérêt constant, le modèle hexanomial est équivalent au modèle trinomial d'évolution du prix S de l'actif risqué suivant :

- en cas de hausse, le prix est donné par : $S e^{r\Delta t} e^{1s\sqrt{\Delta t}}$;
- en cas de "stagnation", le prix est donné par : $S e^{r\Delta t}$
- en cas de baisse, le prix est donné par : $S e^{r\Delta t} e^{-1s\sqrt{\Delta t}}$

Les probabilités obtenues sont identiques à celles de l'approche séquentielle hexanomiale. Et à l'instar de Tian (1993), en s'appuyant sur les conditions de Lindeberg pour le théorème central limite, il est facile de démontrer la convergence en loi du processus.

En raison de la dépendance du rapport $\frac{u^n}{P_i^n}$ au prix de l'actif risqué, au cours d'une même période, seule la convergence numérique des approches séquentielles vers le modèle de Merton a pu être mise en évidence.

¹ Sous cette hypothèse, toutes les obligations rapportent le taux sans risque au cours d'une période, et ce quelle que soit leur maturité. La probabilité réelle q de hausse des facteurs d'actualisation est alors égale à p . La volatilité actuelle annualisée du taux d'intérêt de maturité k devient alors : $s_{\pi}(0, k) = -n_0^{3/2} \sqrt{p(1-p)} \ln(d(k)^{1/k})$, où n_0 est le nombre de périodes par an. En inversant cette formule on obtient directement la fonction $d(k)$.

² La preuve de ce résultat est apportée, dans la note 6, dans le cadre du modèle hexanomial présenté plus loin. Une démonstration identique conduirait au même résultat dans le cadre du modèle de Kishimoto généralisé.

³ Il s'agit la probabilité risque neutre de CRR telle que : $p = \frac{\exp(rDt) - \bar{d}}{u - d}$ sous l'hypothèse d'un taux r nul.

⁴ Si $\forall n, \frac{d(n+1)}{d(n)} = 1$, on peut écrire :

$$\frac{d(n+t)}{d(n+t-1)} \times \frac{d(n+t-1)}{d(n+t-2)} \times \dots \times \frac{d(n+1)}{d(n)} = 1, \text{ soit : } \frac{d(n+t)}{d(n)} = 1$$

Les fonctions perturbatrices du modèle de Ho et Lee généralisé sont alors égales à 1 et la structure des taux ne subit aucune déformation.

REFERENCES

- AMIN K.I.** et **JARROW R.A.**, "Pricing options on risky assets in a stochastic interest rate economy", *Mathematical Finance*, Vol 2, n° 4, octobre 1992, p 217-237.
- AMIN K.I.** et **BODURTHA J.N.**, "Discrete-time Valuation of American Options with Stochastic Interest Rates", *Review of Financial Studies*, Spring 1995 Vol 8, N° 1, p 193-234
- AUGROS J.C.**, "Evaluation probabiliste des options : introduction à l'univers forward neutre", *Journal de la Société de Statistique de Paris*, 1^{er} trimestre 1998.
- AUGROS J.C.** et **GAY P.**, "Modèle d'évaluation à taux d'intérêt stochastiques d'une option sur contrat à terme obligataire : application à la mesure des paramètres du modèle binomial", *Conférence Internationale de l'AFFI*, Paris, juin 1989.
- AUGROS J. C.** et **QUERUEL M.**, "Modèle d'évaluation d'un actif contingent aux taux d'intérêt et à deux actifs risqués", *colloque AFIR Cairns Australie*, juillet 1997 et 14^{ème} conférence internationale de finance AFFI, Grenoble, juin 1997.
- BLACK F.**, **DERMAN E.** et **TOY W.**, "A One-Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options", *Financial Analyst Journal*, janvier-février 1990, p 33-39.
- BLACK F.** et **SCHOLES F.**, "The pricing of options and corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, Vol 81, n°3, 1973, p 637-659.
- BONNASSIEUX M.** et **BRUNEL V.**, "Un modèle de Ho et Lee généralisé", *Colloque AFIR Rome*, 1993, p 57-74.
- BOYLE P.P.**, "A Lattice Framework for Option Pricing with Two state Variables", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol 23, n° 1, March 1988, p 1 - 12.
- BOYLE P.P.**, **EVNINE J.** et **GIBBS S.**, "Numerical Evaluation of Multivariate Contingent Claims", *Review of Financial Studies*, vol 2, n°2, 1989, p 241-250.
- COX J.**, **ROSS S.** et **RUBINSTEIN M.**, "Option Pricing : A Simplified Approach", *Journal of Financial Economics*, Vol 7, 1979, p 229-264.

DANA R-A et JEANBLANC-PICQUE M., "Marchés Financiers en Temps Continu - Valorisation et Equilibre", *Economica, Collection Recherche en Gestion*, 1994.

EVNINE J.J., "Three Essays in the Use of Option Pricing Theory", Thèse, *Université de Californie, Berkeley*, 1983.

HEATH D., JARROW R. et MORTON A., "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates : A Discrete Time Approximation", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol 25, 1990, p 419-440.

HEATH D., JARROW R. et MORTON A., "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates : A New Methodology for Contingent Claims Valuation", *Econometrica*, vol 60 n°1, janvier 1992, p 77-105.

HO T. et LEE S.B., "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims", *Journal of Finance*, Vol 41, n°5, décembre 1986.

HULL J.C., "*Options, Futures and Other Derivatives*", Prentice Hall, International Edition, third edition, 1997.

KAZZIHA S. et REBONATO R., "Unconditional Variance, Mean Reversion and Short Rate Volatility in the Calibration of the Black, Derman and Toy Model and of Two-Dimensional Log-Normal Short Rate Models", *Electronic Journal of Financial Risk, Net Exposure* : http://www.netexposure.co.uk/regd/issues/2/kazziha_rebonato/index.html, novembre 1997.

KISHIMOTO N., "Pricing of Asset-Linked Bonds Under Interest Rates Risk", thesis, Graduate School of Business Administration, Université de New York, 1987.

KISHIMOTO N., "Pricing Contingent Claims under Interest Rate and Asset Price Risk", *Journal of Finance*, Vol XLIV, N° 3, July 1989.

MERTON R.C., "Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, Printemps 1973.

PARZEN E., "Modern Probability Theory and Its Applications", *Wiley Publications In Statistics*, 9^{ème} édition, mars 1967.

QUERUEL M., "L'analyse du risque de taux d'intérêt dans un établissement bancaire", thèse, décembre 1996, *ISFA, Université Claude Bernard Lyon 1*.

SANDMANN K., "The pricing of options with an uncertain interest rate : a discrete-time approach", *Mathematical Finance*, Vol 3, n° 2, April 1993, p 201-216.

SANDMANN K. et SONDERMANN D., "A term structure model and the pricing of interest rate derivative", *Review of Futures Markets*, vol 12/2, 1993, p 391-423

TIAN Y., "A Modified Lattice Approach to Option Pricing", *Journal of Futures Markets*, vol 13, n°5, août 1993, p 563-577.