

# EVALUATION SEQUENTIELLE D'UN ACTIF CONTINGENT A PLUSIEURS ACTIFS RISQUES

Jean-Claude AUGROS  
Professeur à l'ISFA  
UCB Lyon I - Bât 101 - ISFA  
43, Bd du 11 novembre 1918  
69622 – Villeurbanne CEDEX  
Tél : 04.72.43.11.75  
Fax : 04.72.43.11.76  
e-mail : augros@cismsun.univ-lyon1.fr

Michaël MORENO  
Allocataire - Moniteur  
UCB Lyon I - Bât 101 - ISFA  
43, Bd du 11 novembre 1918  
69622 - Villeurbanne CEDEX  
Tél : 04.72.43.11.75  
Fax : 04.72.43.11.76  
e-mail : moreno@cismsun.univ-lyon1.fr

Le 27 octobre 1998

## **Résumé :**

Après avoir mis en évidence la présence d'opportunités d'arbitrages dans le modèle séquentiel d'évaluation d'un actif contingent à deux actifs risqués de Kishimoto (1987), les auteurs proposent une amélioration de cette approche séquentielle la rendant libre d'arbitrage lorsque le nombre de périodes de discrétisation tend vers l'infini. Cette amélioration est obtenue par la substitution de l'approche de Cox, Ross et Rubinstein (1979) par celle de Jarrow et Rudd (1981). Par la suite, le modèle proposé est généralisé au cas d'une option portant sur un plus grand nombre d'actifs risqués sous-jacents.

## **Abstract :**

In the sequential approach due to Kishimoto (1987) allowing the valuation of an option on two risky assets, arbitrage opportunities do exist. After demonstrating this first result, the authors show how to suppress arbitrage opportunities using Jarrow and Rudd's model rather than Cox, Ross and Rubinstein's one. Then, the approach is extended to the case of an option depending on several assets.

## Mots clés :

Action, méthode séquentielle, option sur plusieurs actifs.

## keywords :

Share, sequential approach, option on many assets.

## Evaluation séquentielle d'un actif contingent à plusieurs actifs risqués

L'évaluation des options contingentes à plusieurs actifs risqués a déjà fait l'objet de plusieurs modélisations majeures parmi lesquelles figure, en premier lieu, celle de Margrabe (1978), relative aux options d'échange d'un actif contre un autre actif. Plus tard, l'extension aux options sur maximum (ou minimum) de deux actifs a été obtenue par Stulz (1982). Dans les deux cas, les solutions proposées sont exprimées sous la forme de formules fermées, comparables à celle de Black et Scholes (BS 1973) pour l'évaluation d'une option sur un seul actif. Aussi, à l'instar du modèle de BS, l'éventuel caractère américain de l'option ne peut être pris en compte.

Les modèles discrets d'évaluation permettent d'intégrer cette contrainte. Parmi les méthodes par arborescence proposées dans la littérature, trois types d'approches peuvent être distinguées : celle des arbres « lasers », celle des arbres « parallèles » et celle des arbres « séquentiels ». Les arbres « lasers » ont notamment été développés par Boyle, Evnine et Gibbs (1989). Ils ont la particularité d'être multidimensionnels. Ainsi, dans le cas d'une option dépendant de  $m$  actifs risqués sous-jacents, l'arbre est de dimension<sup>1</sup>  $m+1$ . Enfin, initialement développée par Evnine (1983) pour les options sur deux actifs non corrélés, l'approche des arbres séquentiels repose sur une décomposition des périodes de discrétisation de l'intervalle de gestion en plusieurs sous périodes. Cette méthode, généralisée par Cox et Rubinstein<sup>2</sup> (1985) au cas où les deux actifs sont corrélés, engendre  $2^3$  états succédant à chaque nœud de l'arbre. Une alternative, réduisant ce nombre à  $2^2$ , a été proposée par Kishimoto en 1987.

Cet article révèle, dans un premier temps, l'existence implicite d'opportunités d'arbitrage dans l'approche de Kishimoto. Dans un deuxième temps, une correction est apportée à l'approche séquentielle, permettant d'obtenir l'absence d'opportunité d'arbitrage lorsque le nombre de périodes de discrétisation tend vers l'infini. La convergence en loi des distributions des rendements des actifs vers deux lois normales corrélées est démontrée. Dans un troisième temps, une généralisation de l'approche séquentielle, au cas où il existe un plus grand nombre d'actifs risqués sous-jacents, est présentée. Ensuite, deux applications du modèle sont proposées afin de comparer les résultats du modèle avec ceux des modèles préexistants. Enfin, il est montré qu'il est possible de classer, par ordre de prix croissant, des options dépendant de plusieurs actifs risqués sans avoir à calculer leurs prix.

### I. Evaluation séquentielle d'un actif contingent à deux actifs risqués sous-jacents

Sous l'hypothèse d'un taux d'intérêt constant, Kishimoto a proposé une méthode séquentielle d'évaluation de produits dérivés contingents à deux actifs risqués sous-jacents. La diffusion séquentielle du prix des actifs est effectuée à l'aide du processus binomial de Cox, Ross et Rubinstein (CRR-1979). Selon l'auteur, il n'existe pas dans son modèle d'opportunité d'arbitrage. Nous montrons, en premier lieu, que le modèle de Kishimoto n'est pas libre d'arbitrage, sauf dans le cas où une condition particulière sur la volatilité du rendement des actifs risqués est imposée. En second lieu, afin d'éviter une telle restriction, le modèle binomial de Jarrow et Rudd (JR - 1981) est substitué à celui de CRR pour diffuser le prix des actifs.

## A. Le modèle de Kishimoto à deux actifs risqués

Les hypothèses du modèle sont les suivantes :

- H1 : le marché est sans friction. Il n'y a ni taxe, ni coût de transaction, ni restriction sur les ventes à découvert. Les titres sont parfaitement divisibles ;
- H2 : le taux d'intérêt  $r$ , exprimé en rendement annuel continu, est supposé constant<sup>3</sup> ;
- H3 : l'intervalle de gestion est divisé en  $N$  périodes de longueur  $\Delta t$  identique. Chaque période est elle-même subdivisée en deux sous périodes de durée identique ; la date intermédiaire de la  $(n+1)^{\text{ème}}$  période est notée  $n+1/2$ . Les transactions ont lieu uniquement au début de chaque sous période ;
- H4 : Il est supposé qu'en temps continu, le prix de l'actif  $i$ ,  $i \in \{1;2\}$ , est un processus brownien géométrique défini, dans l'univers risque neutre, par l'équation de diffusion suivante :

$$\frac{dS_i}{S_i} = r dt + \mathbf{s}_i d\hat{Z}_i,$$

où  $\hat{Z}_1$  et  $\hat{Z}_2$  sont des browniens standards de corrélation instantanée  $\mathbf{r}$ .

- H5 : durant la première sous période, les deux actifs risqués, notés  $S_1$  et  $S_2$ , sont supposés parfaitement corrélés. Les évolutions possibles sont représentées par un schéma binomial. Au cours de la première sous période, si le prix de l'actif  $S_2$  subit une hausse, les prix des actifs  $S_1$  et  $S_2$  sont respectivement multipliés par les coefficients  $u_{1,1}$  et  $u_{2,1}$ . Si une baisse de l'actif  $S_2$  se produit, les prix des actifs  $S_1$  et  $S_2$  sont respectivement multipliés par les coefficients<sup>4</sup>  $d_{1,1}$  et  $d_{2,1}$ . Durant la seconde sous période seul le premier actif évolue aléatoirement selon un schéma binomial. Le prix de l'actif  $S_1$  est alors multiplié par un coefficient  $u_{1,2}$  (resp.  $d_{1,2}$ ) en cas de hausse (resp. baisse), quel que soit l'état de la nature, le prix de l'actif  $S_2$  est multiplié par  $e^{\frac{1}{2}r\Delta t}$ .

Pour la première période, ces évolutions peuvent être représentées par le schéma suivant :

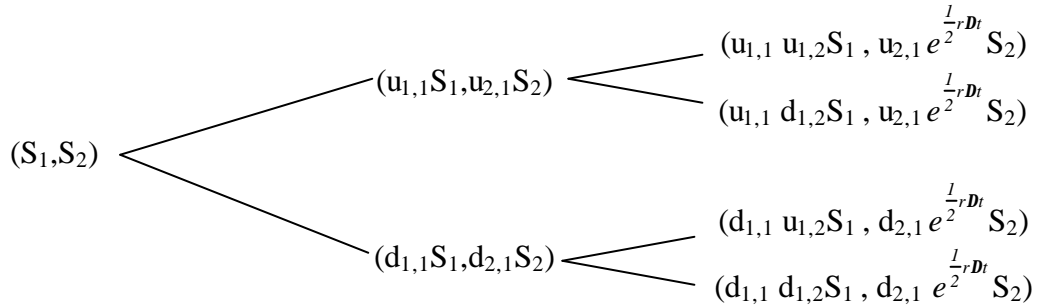


Figure 1

Soit  $p$ , la probabilité risque neutre de hausse de l'actif risqué  $S_2$  au cours de la première sous période.

Dans l'univers risque neutre, afin d'assurer l'absence d'opportunité d'arbitrage entre chaque actif risqué et l'actif dérivé au cours de cette sous période, il est nécessaire que :

$$pu_{1,1} + (1-p)d_{1,1} = e^{\frac{1}{2}r\Delta t} \quad (1)$$

$$\text{et } pu_{2,1} + (1-p)d_{2,1} = e^{\frac{1}{2}r\Delta t} \quad (2)$$

On désigne à présent par  $q$  la probabilité risque neutre de hausse de l'actif risqué  $S_1$  au cours de la seconde sous période.

Dans l'univers risque neutre,  $q$  est déterminée par :

$$q = \frac{e^{\frac{1}{2}r\Delta t} - d_{1,2}}{u_{1,2} - d_{1,2}} \quad (3)$$

On désigne par  $(n,i,j)$  l'état de la nature où  $n$  représente la date de début de la  $(n+1)^{\text{ème}}$  période,  $i$  le nombre de hausses de l'actif  $S_2$ , intervenues au cours des premières sous périodes depuis la date 0, et  $j$  le nombre de hausses de l'actif  $S_1$ , intervenues au cours des secondes sous périodes depuis la date 0. L'évolution de l'actif contingent, à partir de l'état de la nature  $(n,i,j)$ , peut être représenté, au cours de la  $(n+1)^{\text{ème}}$  période, par le schéma suivant :

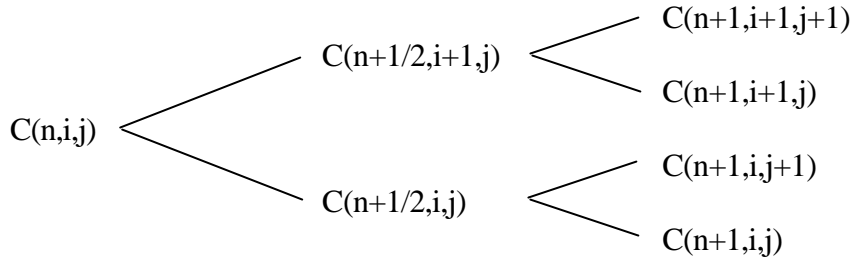


Figure 2

Le prix de l'actif contingent, à la date  $n$ , peut être obtenu par induction arrière, à l'aide de la formule suivante :

$$C(n,i,j) = e^{-rDt} [ pq C(n+1,i+1,j+1) + p(1-q) C(n+1,i+1,j) + (1-p)q C(n+1,i,j+1) + (1-p)(1-q) C(n+1,i,j) ] \quad (4)$$

Les valeurs des paramètres proposées par Kishimoto sont données par les formules suivantes :

$$p = \frac{e^{\frac{1}{2}r\Delta t} - d_{1,1}}{u_{1,1} - d_{1,1}}$$

$$u_{1,1} = e^{rs_1\sqrt{\Delta t}}$$

$$u_{2,1} = e^{s_2\sqrt{\Delta t}}$$

$$u_{1,2} = e^{\sqrt{1-r^2}s_1\sqrt{\Delta t}}$$

$$d_{1,1} = \frac{1}{u_{1,1}}$$

$$d_{2,1} = \frac{1}{u_{2,1}}$$

$$d_{1,2} = \frac{1}{u_{1,2}}$$

Il est rappelé que  $r$  est le coefficient de corrélation entre les rendements des deux actifs risqués, et que  $\sigma_i$  représente l'écart type du rendement de l'actif  $i$ .

Selon Kishimoto, ces paramètres assurent l'absence d'opportunité d'arbitrage et le respect, lorsque  $N$  tend vers l'infini, des espérances et des variances de chacun des deux actifs, ainsi que la covariance des rendements des deux actifs risqués au cours de chaque période.

En fait, l'absence d'opportunité d'arbitrage durant la première sous période n'est pas forcément vérifiée. En effet, à partir des équations (1) et (2) et de l'expression des paramètres, il vient :

$$pu_{1,1} + (1-p)\frac{1}{u_{1,1}} = pu_{2,1} + (1-p)\frac{1}{u_{2,1}}$$

$$\Leftrightarrow p(u_{1,1} - u_{2,1}) = (1-p) \left( \frac{u_{1,1} - u_{2,1}}{u_{2,1} u_{1,1}} \right)$$

$$\text{ou encore si } u_{1,1} \neq u_{2,1} \text{ (i.e. } \mathbf{s}_2 \neq \mathbf{rS}_1 \text{): } p = \frac{1}{1 + u_{1,1} u_{2,1}}$$

$$\text{Or } p = \frac{e^{\frac{1}{2}r\Delta t} - d_{1,1}}{u_{1,1} - d_{1,1}}, \text{ donc : } \frac{e^{\frac{1}{2}r\Delta t} - d_{1,1}}{u_{1,1} - d_{1,1}} = \frac{1}{1 + u_{1,1} u_{2,1}}$$

$$\text{Ce qui conduit à : } u_{2,1} = \frac{u_{1,1} - e^{\frac{1}{2}r\Delta t}}{u_{1,1} e^{\frac{1}{2}r\Delta t} - 1} \quad (5)$$

Ainsi, en l'absence d'opportunité d'arbitrage, la valeur de  $u_{2,1}$  devrait dépendre de la volatilité du rendement de l'actif risqué  $S_1$ , de la corrélation des rendements des actifs risqués, du taux d'intérêt et de la durée de la période. Pourtant  $u_{2,1}$  est estimé par :  $u_{2,1} = e^{s_2 \sqrt{\Delta t}}$ . De ce fait, il est évident que l'un des paramètres n'est pas libre.

Par exemple, en considérant un taux d'intérêt nul, on trouve :

$$u_{2,1} = \frac{u_{1,1} - 1}{u_{1,1} - 1} = 1, \text{ ce qui implique que } \mathbf{s}_2 = 0.$$

En conclusion, la volatilité du rendement du second actif risqué doit être égale<sup>5</sup> à  $\mathbf{rS}_1$ . Sinon, l'équation (2) n'est pas vérifiée et il y a opportunité d'arbitrage.

## B. Modification du modèle de Kishimoto à deux actifs risqués

L'utilisation du modèle de Jarrow et Rudd<sup>6</sup> (JR - 1981) plutôt que celui de CRR permet de supprimer l'opportunité d'arbitrage lorsque le nombre de périodes de discrétisation tend vers l'infini. En effet, ce modèle permet d'obtenir une probabilité risque neutre de hausse, dans un treillis binomial, égale à  $\frac{1}{2}$ . Ce résultat est obtenu en ajustant les coefficients multiplicatifs de hausse et de baisse du prix de l'actif risqué. Appliqué à l'approche séquentielle, ces coefficients sont donnés par :

$$\begin{aligned} u_{1,1} &= e^{\frac{1}{2}r\Delta t - \frac{1}{2}r^2 s_1^2 \Delta t + r s_1 \sqrt{\Delta t}} & u_{2,1} &= e^{\frac{1}{2}r\Delta t - \frac{1}{2}s_2^2 \Delta t + s_2 \sqrt{\Delta t}} & u_{1,2} &= e^{\frac{1}{2}r\Delta t - \frac{1}{2}(1-r^2) s_1^2 \Delta t + \sqrt{1-r^2} s_1 \sqrt{\Delta t}} \\ d_{1,1} &= e^{\frac{1}{2}r\Delta t - \frac{1}{2}r^2 s_1^2 \Delta t - r s_1 \sqrt{\Delta t}} & d_{2,1} &= e^{\frac{1}{2}r\Delta t - \frac{1}{2}s_2^2 \Delta t - s_2 \sqrt{\Delta t}} & d_{1,2} &= e^{\frac{1}{2}r\Delta t - \frac{1}{2}(1-r^2) s_1^2 \Delta t - \sqrt{1-r^2} s_1 \sqrt{\Delta t}} \end{aligned}$$

Soient à présent un réel  $s$  non nul et  $\mathbf{x}(s)$  une fonction déterminée par :

$$\mathbf{x}(s) = \frac{e^{\frac{1}{2}r\Delta t} - e^{\frac{1}{2}r\Delta t - \frac{1}{2}s^2 \Delta t - s \sqrt{\Delta t}}}{e^{\frac{1}{2}r\Delta t - \frac{1}{2}s^2 \Delta t + s \sqrt{\Delta t}} - e^{\frac{1}{2}r\Delta t - \frac{1}{2}s^2 \Delta t - s \sqrt{\Delta t}}}$$

Un développement de Taylor à l'ordre 4 donne :  $\mathbf{x}(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{24} (s \sqrt{\Delta t})^3 + O(\sqrt{\Delta t})^5$

D'où,  $\mathbf{x}(s) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{2}$ .

La similitude de  $\mathbf{x}$  avec les probabilités risque-neutre  $p$  et  $q$  permet d'estimer ces dernières par le rapport  $\frac{1}{2}$ . C'est l'un des avantages du modèle de JR. On obtient donc :

$$p = \frac{e^{\frac{1}{2}r\Delta t} - d_{1,1}}{u_{1,1} - d_{1,1}} \approx \frac{e^{\frac{1}{2}r\Delta t} - d_{2,1}}{u_{2,1} - d_{2,1}} \approx \frac{1}{2}.$$
 En conséquence, lorsque  $N$  tend vers l'infini, il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage. Dans la suite de cette partie,  $N$  est supposé suffisamment grand pour pouvoir estimer les probabilités  $p$  et  $q$  par  $\frac{1}{2}$  (numériquement, la convergence vers  $\frac{1}{2}$  est très rapide).

#### a) Respect des rendements des processus de diffusion

Il est nécessaire de vérifier que les espérances, les variances et la covariance des rendements des deux actifs risqués sont respectées au cours de chaque période.

Soit  $X_1$  le rendement de l'actif risqué  $S_1$  au cours d'une période.

$$E[X_1] = pq \ln(u_{1,1}u_{1,2}) + p(1-q) \ln(u_{1,1}d_{1,2}) + (1-p)q \ln(d_{1,1}u_{1,2}) + (1-p)(1-q) \ln(d_{1,1}d_{1,2})$$

En remplaçant les probabilités  $p$  et  $q$  par leurs estimations et les coefficients  $u_{1,1}$ ,  $d_{1,1}$ ,  $u_{1,2}$  et  $d_{1,2}$  par leurs valeurs, il vient aisément :

$$E[X_1] = \left( r - \frac{1}{2} \mathbf{s}_1^2 \right) \mathbf{D}t$$

Par ailleurs,

$$E[X_1^2] = pq [\ln(u_{1,1}u_{1,2})]^2 + p(1-q) [\ln(u_{1,1}d_{1,2})]^2 + (1-p)q [\ln(d_{1,1}u_{1,2})]^2 + (1-p)(1-q) [\ln(d_{1,1}d_{1,2})]^2$$

$$\Rightarrow \text{Var}[X_1] = \mathbf{s}_1^2 \mathbf{D}t + O(\sqrt{\mathbf{D}t})^3$$

On vérifie donc que l'espérance et la variance de  $X_1$  sont les mêmes dans le processus discret que dans le processus continu, dès lors que  $N$  tend vers l'infini.

La même identité peut être observée pour l'espérance et la variance du rendement de  $S_2$ . En désignant par  $X_2$  le rendement de l'actif risqué  $S_2$  au cours d'une période, il vient en effet :

$$E[X_2] = \left( r - \frac{1}{2} \mathbf{s}_2^2 \right) \mathbf{D}t$$

$$\text{et } \text{Var}(X_2) = \mathbf{s}_2^2 \mathbf{D}t + O(\sqrt{\mathbf{D}t})^3$$

Par ailleurs, dans le cadre discret, l'espérance du produit  $X_1 X_2$  s'exprime de la façon suivante :

$$E(X_1 X_2) = pq \ln(u_{1,1}u_{1,2}) \ln\left(u_{2,1}e^{\frac{1}{2}r\mathbf{D}t}\right) + p(1-q) \ln(u_{1,1}d_{1,2}) \ln\left(u_{2,1}e^{\frac{1}{2}r\mathbf{D}t}\right)$$

$$+ (1-p)q \ln(d_{1,1}u_{1,2}) \ln\left(d_{2,1}e^{\frac{1}{2}r\mathbf{D}t}\right) + (1-p)(1-q) \ln(d_{1,1}d_{1,2}) \ln\left(d_{2,1}e^{\frac{1}{2}r\mathbf{D}t}\right)$$

d'où, après calculs,

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = r \mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2 \mathbf{D}t + O(\sqrt{\mathbf{D}t})^3$$

Ainsi, la covariance du modèle discret converge également vers celle du modèle continu.

Le processus séquentiel quadrinomial, tel qu'il vient d'être redéfini, respecte donc l'ensemble des contraintes sur les espérances, les variances et la covariance des rendements des actifs risqués au cours de chaque période, lorsque  $N$  tend vers l'infini. Le modèle a aussi été rendu libre d'opportunité d'arbitrage. De plus, tandis que le modèle de Kishimoto ne permet pas d'évaluer l'actif contingent lorsque les rendements des deux actifs risqués sous-jacents sont parfaitement corrélés<sup>7</sup>, ceci est possible avec notre approche.

## b) Convergence en loi

Il s'agit de montrer que les rendements des deux actifs risqués sont normalement distribués lorsque le nombre de périodes de subdivision de l'intervalle de gestion tend vers l'infini. La méthode consiste à établir la convergence des distributions des rendements de chaque actif, au cours des premières et secondes sous période, vers des lois normales.

### 1) Convergence de la distribution du rendement du premier actif

On note :

$$\begin{aligned} u'_{1,1} &= u_{1,1} e^{\left(-\frac{r}{2} + \frac{1}{2} r^2 s_1^2\right) \Delta t} & u'_{1,2} &= u_{1,2} e^{\left(-\frac{r}{2} + \frac{1}{2} (1-r^2) s_1^2\right) \Delta t} \\ d'_{1,1} &= d_{1,1} e^{\left(-\frac{r}{2} + \frac{1}{2} r^2 s_1^2\right) \Delta t} & d'_{1,2} &= d_{1,2} e^{\left(-\frac{r}{2} + \frac{1}{2} (1-r^2) s_1^2\right) \Delta t} \end{aligned}$$

Soit  $S_1(n)$ , un prix de l'actif risqué  $S_1$  après  $n$  périodes et  $S_1(0)$ , le prix de ce même actif à l'instant initial. Le nombre de multiplication par le coefficient  $u_{1,1}$  (resp.  $u_{1,2}$ ) de l'actif au cours des premières (resp. secondes) sous périodes est donné par  $j_1$  (resp.  $j_2$ ).

Le rendement de l'actif risqué est donné par :

$$\begin{aligned} \ln \frac{S_1(n)}{S_1(0)} &= \ln \left( u_{1,1}^{j_1} d_{1,1}^{n-j_1} u_{1,2}^{j_2} d_{1,2}^{n-j_2} \right) = \ln \left( \frac{u_{1,1}^{j_1} u_{1,2}^{j_2}}{d_{1,1}^{j_1} d_{1,2}^{j_2}} d_{1,1}^n d_{1,2}^n \right) \\ &= j_1 \ln \left( \frac{u_{1,1}}{d_{1,1}} \right) + n \ln d_{1,1} + j_2 \ln \left( \frac{u_{1,2}}{d_{1,2}} \right) + n \ln d_{1,2} \end{aligned}$$

Ce rendement peut utilement être décomposé en deux termes indépendants, appelés rendements sous périodiques :

- Soit :  $X_{1,1} = \left( \ln \frac{S_1(n)}{S_1(0)} \middle| 1^{\text{ère}} \text{ sous période} \right) = j_1 \ln \left( \frac{u_{1,1}}{d_{1,1}} \right) + n \ln d_{1,1}$ , le rendement de l'actif dû aux  $n$  premières sous périodes ;
- Soit :  $X_{1,2} = \left( \ln \frac{S_1(n)}{S_1(0)} \middle| 2^{\text{nde}} \text{ sous période} \right) = j_2 \ln \left( \frac{u_{1,2}}{d_{1,2}} \right) + n \ln d_{1,2}$ , le rendement de l'actif dû aux  $n$  secondes sous périodes.

Les espérances des rendements sous périodiques sont égales à :

$$E(X_{1,1}) = n \left\{ \left( \frac{r}{2} - \frac{1}{2} r^2 s_1^2 \right) \Delta t + p_1 \ln \left( \frac{u'_{1,1}}{d'_{1,1}} \right) + \ln d'_{1,1} \right\} = \hat{\mathbf{m}}_{1,1} n$$

$$E(X_{1,2}) = n \left\{ \left( \frac{r}{2} - \frac{1}{2}(1-r^2)\mathbf{s}_1^2 \right) \Delta t + p_2 \ln \left( \frac{u_{1,2}}{d_{1,2}} \right) + \ln d_{1,2} \right\} = \hat{\mathbf{m}}_{1,2} n$$

Par analogie, les variances sous périodiques sont données par :

- $Var(X_{1,1}) = Var(j_1) \left[ \ln \left( \frac{u_{1,1}}{d_{1,1}} \right) \right]^2 = 4nr^2 p_1 (1-p_1) \mathbf{s}_1^2 \Delta t = \hat{\mathbf{s}}_{1,1}^2 n$ , due aux  $n$  premières sous périodes,
- $Var(X_{1,2}) = Var(j_2) \left[ \ln \left( \frac{u_{1,2}}{d_{1,2}} \right) \right]^2 = 4n(1-r^2) p_2 (1-p_2) \mathbf{s}_1^2 \Delta t = \hat{\mathbf{s}}_{1,2}^2 n$ , due aux  $n$  secondes sous périodes.

On note à présent :

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{1,1} &= \frac{r}{2} - \frac{1}{2} r^2 \mathbf{s}_1^2 & \mathbf{m}_{1,2} &= \frac{r}{2} - \frac{1}{2} (1-r^2) \mathbf{s}_1^2 \\ \mathbf{s}_{1,1}^2 &= r^2 \mathbf{s}_1^2 & \mathbf{s}_{1,2}^2 &= (1-r^2) \mathbf{s}_1^2 \end{aligned}$$

Sachant que :

$$\begin{aligned} n \left[ p_1 \ln \left( \frac{u_{1,1}}{d_{1,1}} \right) + \ln d_{1,1} \right] &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 & n \left[ p_2 \ln \left( \frac{u_{1,2}}{d_{1,2}} \right) + \ln d_{1,2} \right] &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \\ p_1 (1-p_1) &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{4} & p_2 (1-p_2) &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Il vient, lorsque  $n$  tend vers l'infini :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{m}}_{1,1} n &\rightarrow \mathbf{m}_{1,1} t & \hat{\mathbf{m}}_{1,2} n &\rightarrow \mathbf{m}_{1,2} t \\ \hat{\mathbf{s}}_{1,1}^2 n &\rightarrow \mathbf{s}_{1,1}^2 t & \hat{\mathbf{s}}_{1,2}^2 n &\rightarrow \mathbf{s}_{1,2}^2 t \end{aligned}$$

A présent, il suffit de vérifier les conditions de Liapounov à l'ordre 3 pour conclure sur la convergence des deux distributions binomiales vers deux distributions normales. Il suffit que les convergences suivantes soient vraies :

$$\begin{aligned} \frac{p_1 \left| \ln u_{1,1} - \hat{\mathbf{m}}_{1,1} \right|^3 + (1-p_1) \left| \ln d_{1,1} - \hat{\mathbf{m}}_{1,1} \right|^3}{\hat{\mathbf{s}}_{1,1}^3 \sqrt{n}} &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \\ \frac{p_2 \left| \ln u_{1,2} - \hat{\mathbf{m}}_{1,2} \right|^3 + (1-p_2) \left| \ln d_{1,2} - \hat{\mathbf{m}}_{1,2} \right|^3}{\hat{\mathbf{s}}_{1,2}^3 \sqrt{n}} &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \end{aligned}$$

Ces conditions étant vraies, les rendements sous périodiques sont normalement distribués lorsque  $n$  tend vers l'infini. Par ailleurs, ces rendements sont indépendants. De ce fait, le rendement total de l'actif est lui aussi normalement distribué de moyenne  $\mu_1$  égale à la somme des moyennes des rendements sous périodiques et de variance  $\sigma_1^2 t$  la somme des variances des rendements sous périodiques.



Soit :

$$\left(\frac{r}{2} - \frac{1}{2} r^2 \mathbf{s}_1^2\right)t + \left(\frac{r}{2} - \frac{1}{2}(1-r^2)\mathbf{s}_1^2\right)t = \left(r - \frac{1}{2}\mathbf{s}_1^2\right)t = \mathbf{m}_1$$

$$r^2 \mathbf{s}_1^2 t + (1-r^2)\mathbf{s}_1^2 t = \mathbf{s}_1^2 t$$

## 2) Convergence de la distribution du rendement du second actif

On note de même :

$$u'_{2,1} = u_{2,1} e^{\left(\frac{r}{2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2\right)\Delta t} \quad d'_{2,1} = d_{2,1} e^{\left(\frac{r}{2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2\right)\Delta t}$$

Soit  $S_2(n)$ , un prix de l'actif risqué  $S_2$  après  $n$  périodes et  $S_2(0)$ , le prix de ce même actif à l'instant initial. Le nombre de hausses de l'actif au cours des premières sous périodes est donné par  $j_1$ .

Le rendement de l'actif risqué est donné par :

$$\ln \frac{S_2(n)}{S_2(0)} = \ln \left( u_{2,1}^{j_1} d_{2,1}^{n-j_1} e^{\frac{r}{2}\Delta t} \right) = j_1 \ln \left( \frac{u_{2,1}}{d_{2,1}} \right) + n \ln(d_{2,1}) + n \frac{r}{2} \Delta t$$

Ce rendement est décomposable en deux termes indépendants :

- $X_{2,1} = \left( \ln \frac{S_2(n)}{S_2(0)} \middle| 1^{\text{ère}} \text{ sous période} \right) = j_1 \ln \left( \frac{u_{2,1}}{d_{2,1}} \right) + n \ln d_{2,1}$ , le rendement de l'actif dû aux  $n$  premières sous périodes ;
- $X_{2,2} = \left( \ln \frac{S_2(n)}{S_2(0)} \middle| 2^{\text{nde}} \text{ sous période} \right) = n \frac{r}{2} \Delta t$ , le rendement de l'actif dû aux  $n$  secondes sous périodes. Ce rendement est déterministe.

Les espérances des rendements sous périodiques sont égales à :

$$E(X_{2,1}) = E(j_1) \ln \left( \frac{u_{2,1}}{d_{2,1}} \right) + n \ln d_{2,1} = n \left\{ \left( \frac{r}{2} - \frac{1}{2} \sigma_2^2 \right) \Delta t + p_1 \ln \left( \frac{u'_{2,1}}{d'_{2,1}} \right) + \ln d'_{2,1} \right\} = \hat{\mu}_{2,1} n$$

$$E(X_{2,2}) = n \frac{r}{2} \Delta t = \hat{\mu}_{2,2} n$$

Les variances sous périodiques sont données par :

$$\text{Var}(X_{2,1}) = \text{Var}(j_1) \left[ \ln \left( \frac{u_{2,1}}{d_{2,1}} \right) \right]^2 = np_1(1-p_1) \left[ \ln \left( \frac{u_{2,1}}{d_{2,1}} \right) \right]^2 = 4np_1(1-p_1)\mathbf{s}_2^2 \Delta t = \hat{\mathbf{s}}_{2,1}^2 n$$

$$\text{Var}(X_{2,2}) = 0 = \hat{\mathbf{s}}_{2,2}^2 n$$

On note à présent :

$$\mathbf{m}_{2,1} = \frac{r}{2} - \frac{1}{2} \mathbf{s}_2^2 \quad \mathbf{m}_{2,2} = \frac{r}{2}$$

$$\mathbf{s}_{2,1}^2 = \mathbf{s}_2^2 \quad \mathbf{s}_{2,2}^2 = 0$$

Remarquons que :  $p_1(1-p_1) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{4}$  et  $p_1 \ln \left( \frac{u'_{2,1}}{d'_{2,1}} \right) + \ln d'_{2,1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

On en déduit, lorsque n tend vers l'infini :

$$\hat{\mathbf{m}}_{2,1}n \rightarrow \mathbf{m}_{2,1}t \text{ et } \hat{\mathbf{S}}_{2,1}^2n \rightarrow \mathbf{S}_{2,1}^2t$$

Par ailleurs, pour tout n :  $\hat{\mathbf{m}}_{2,2}n = \mathbf{m}_{2,2}t \text{ et } \hat{\mathbf{S}}_{2,2}^2n = \mathbf{S}_{2,2}^2t.$

A présent, il suffit de vérifier les conditions de Liapounov à l'ordre 3 pour conclure sur la convergence de la distribution binomiale vers une distribution normale. Il suffit que la convergence suivante soit vraie :

$$\frac{p_1 \left| \ln u_{2,1} - \hat{\mu}_{2,1} \right|^3 + (1-p_1) \left| \ln d_{2,1} - \hat{\mu}_{2,1} \right|^3}{\hat{\sigma}_{2,1}^3 \sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Cette condition étant vraie, le rendement sous périodique est normalement distribué lorsque n tend vers l'infini. Ce rendement et le rendement déterministe prenant cours durant la seconde sous période sont indépendants. De ce fait, le rendement total de l'actif est lui aussi normalement distribué de moyenne  $\mu_2$ , égale à la somme des moyennes des rendements sous périodiques, et de variance  $\sigma_2^2t$ , la somme des variances des rendements sous périodiques. Soit :

$$\left( \frac{r}{2} - \frac{1}{2} \mathbf{S}_2^2 \right) t + \frac{r}{2} t = \left( r - \frac{1}{2} \mathbf{S}_1^2 \right) t = \mathbf{m}_2$$

$$\mathbf{S}_2^2 t + 0 = \mathbf{S}_2^2 t$$

### 3) Respect de la corrélation des rendements

Lemme :

Soit  $X_1$ ,  $X_2$  et  $X_3$ , 3 variables aléatoires distribuées respectivement selon les lois normales :  $N(\mathbf{m}_1, \mathbf{S}_1)$ ,  $N(\mathbf{m}_2, \mathbf{S}_2)$ ,  $N(\mathbf{m}_3, \mathbf{S}_3)$  et U une variable déterministe.

On suppose que :

- $X_1$  et  $X_2$  sont parfaitement corrélées
- $X_1$  et  $X_3$  sont indépendantes
- U est indépendante de  $X_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Alors,  $Cov(X_1 + U, X_2 + X_3) = \mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2$

De ce lemme et du calcul de la corrélation effectué ci dessus, on en déduit qu'à la limite, lorsque N tend vers l'infini, la covariance des rendements est respectée.

En conclusion, lorsque N tend vers l'infini, les rendements des processus sont normalement distribués et la corrélation des rendements des deux actifs est respectée. L'utilisation du modèle de JR plutôt que celui de CRR permet donc de supprimer les opportunités d'arbitrage au cours de la première sous période. De plus, le modèle est aussi adapté pour des corrélations parfaites entre les rendements des deux actifs, au contraire du modèle de Kishimoto. Enfin, la preuve de la convergence en loi des distributions des rendements vers des lois normales a été apportée.

## II. Généralisation de l'évaluation séquentielle d'un actif contingent à plusieurs actifs risqués sous-jacents

Le modèle séquentiel précédent peut être généralisé à  $m$  actifs risqués sous-jacents notés  $S_i$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Les espérances, les variances et les covariances des rendements des actifs risqués sont décomposées selon une subdivision d'une même période en plusieurs sous périodes.

Les hypothèses H1 et H2 de l'approche précédente restent inchangées. Seules les hypothèses H3, H4 et H5 sont modifiées :

H3 : l'intervalle de gestion est divisé en  $N$  périodes de longueur identique  $\Delta t$ . Chaque période est divisée en  $m$  sous périodes de durée identique  $\frac{\Delta t}{m}$ . Les dates sont notées

$n + \frac{k}{m}$  avec  $n \in \{0, \dots, N\}$  et  $k \in \{0, \dots, m-1\}$ . Les transactions ne peuvent avoir lieu

qu'au début de ces différentes dates.

H4 : Il est supposé qu'en temps continu, le prix de l'actif  $i$ ,  $i \in \{1; 2; \dots; m\}$ , est un processus brownien géométrique défini, dans l'univers risque neutre, par l'équation de diffusion suivante :

$$\frac{dS_i}{S_i} = r dt + \mathbf{s}_i d\hat{Z}_i,$$

où les browniens standards  $\hat{Z}_i$  et  $\hat{Z}_j$ ,  $i$  et  $j \in \{1; 2; \dots; m\}$ ,  $i \neq j$ , sont de corrélation instantanée  $\mathbf{q}_{i,j}$ .

H5 : durant chaque  $j^{\text{me}}$  sous période d'une période donnée, les  $(m-j+1)$  premiers actifs sont supposés parfaitement corrélés et évoluent selon un schéma binomial. En cas de hausse du prix de l'actif  $S_{m+1-j}$  (resp. baisse) le prix de chaque actif  $S_i$ ,  $i \in \{1, \dots, m+1-j\}$ , est multiplié par un coefficient  $u(i,j)$  (resp.  $d(i,j)$ ). Les  $m-j$  actifs restant évoluent de façon déterministe et leurs prix sont multipliés par le coefficient  $e^{\frac{1}{m}r\Delta t}$ .

Sous ces hypothèses, le nombre d'états de la nature, succédant à un nœud fils, obtenus à l'issue d'une période, est  $2^m$ . Toutefois, à l'aide de l'hypothèse de recombinaison de l'arbre suivante, le nombre d'états peut être ramené à  $(N+1)^m$ .

### Hypothèse de recombinaison :

Le prix des actifs risqués est entièrement déterminé par le nombre de hausses des actifs  $S_{m+1-i}$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ , au cours des sous périodes  $i$ .

Les figures 3 et 4 suivantes permettent de visualiser l'évolution du prix des actifs risqués au cours d'une période.

Schémas d'évolution des m actifs risqués  
au cours de la première période

Au cours des deux premières sous périodes

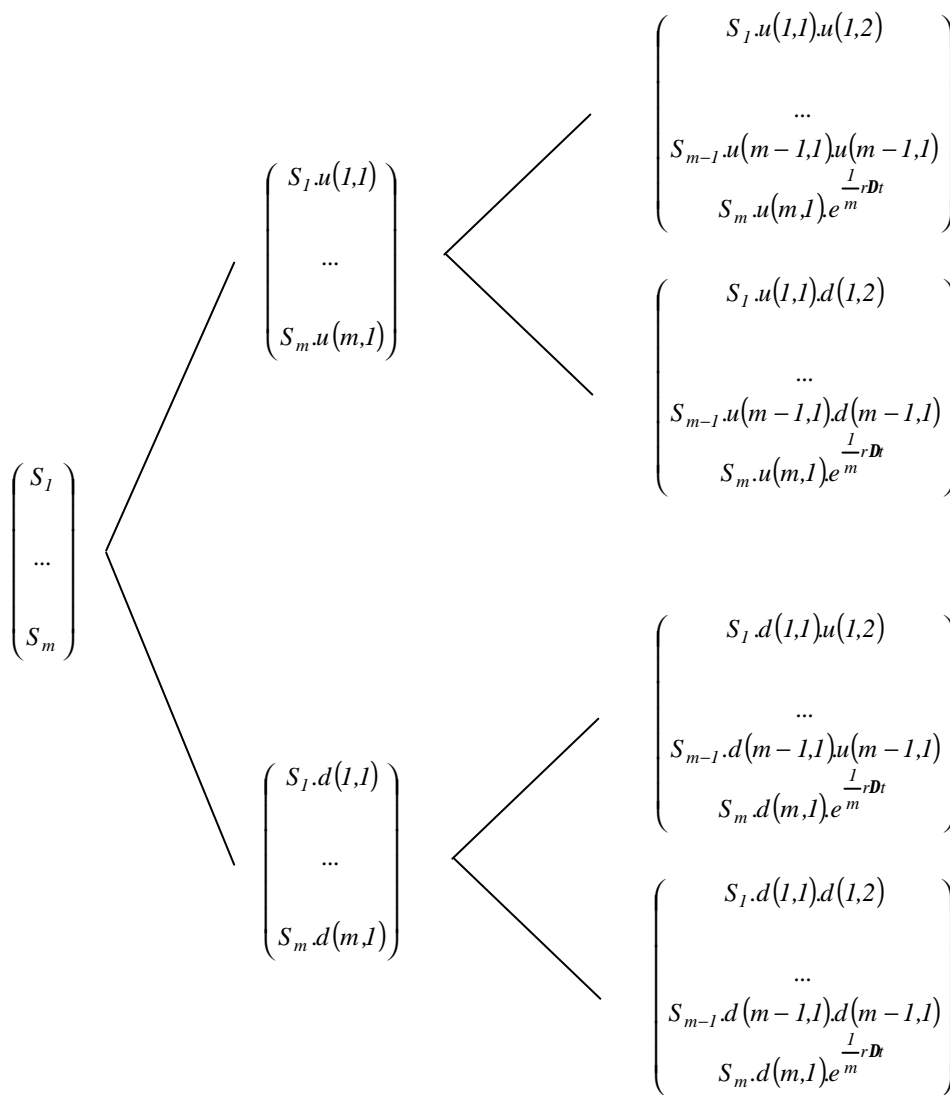


Figure 3

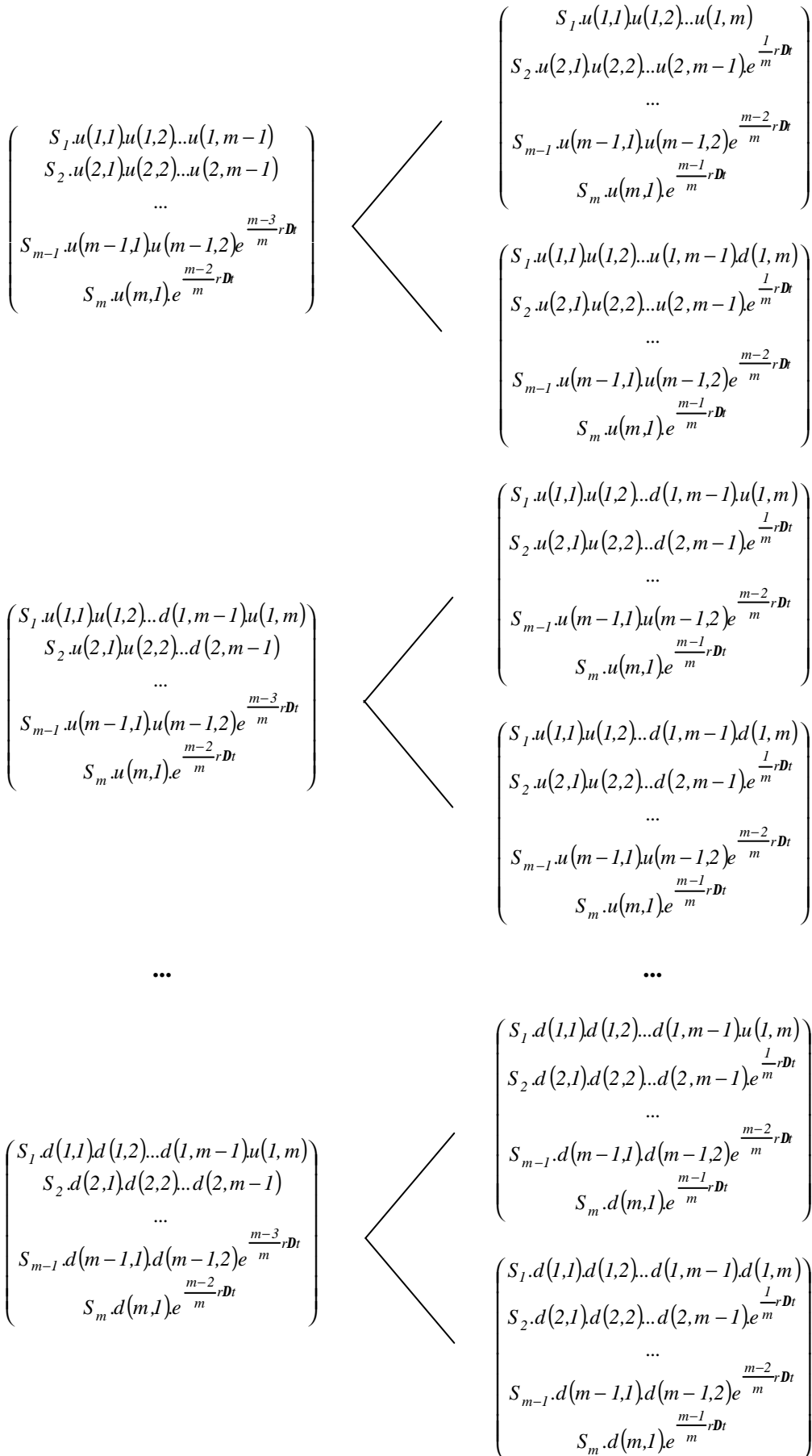


Figure 4

La variance du rendement  $\mathbf{s}_i^2$  de l'actif risqué  $S_i$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ , est décomposée en une somme de variances sous périodiques  $\mathbf{s}_{i,j}^2$ ,  $j \in \{1, \dots, m\}$ , de la manière suivante :

$$\mathbf{s}_i^2 = \sum_{j=1}^{m+1-i} \mathbf{s}_{i,j}^2 \quad (6)$$

$$\text{avec,} \quad \mathbf{s}_{i,j}^2 = \mathbf{s}_i^2 \times \left\{ \mathbf{c}_{m+1-i=j} + \mathbf{r}_{m+1-j,i}^2 \mathbf{c}_{m+1-i \neq j} \right\} \times \left\{ \mathbf{c}_{j=1} + \prod_{k=1}^{j-1} (1 - \mathbf{r}_{m+1-k,i}^2) \right\} \times \mathbf{c}_{m+1-i \geq j} \quad (7)$$

où  $\mathbf{c}$  est la fonction indicatrice et  $\mathbf{r}_{i,j}$  un pseudo coefficient de corrélation<sup>8</sup> entre les rendements des actifs risqués  $S_i$  et  $S_j$ .

Le tableau ci dessous illustre le principe de la décomposition des variances :

$\mathbf{s}_{ij}$	$\mathbf{s}_{i,1}$	$\mathbf{s}_{i,2}$	$\mathbf{s}_{i,3}$	...	$\mathbf{s}_{i,m}$
$\mathbf{s}_m^2$	$\mathbf{s}_m^2$	0	0	0	0
$\mathbf{s}_{m-1}^2$	$\mathbf{r}_{m,m-1}^2 \mathbf{s}_{m-1}^2$	$(1 - \mathbf{r}_{m,m-1}^2) \mathbf{s}_{m-1}^2$	0	0	0
$\mathbf{s}_{m-2}^2$	$\mathbf{r}_{m,m-2}^2 \mathbf{s}_{m-2}^2$	$(1 - \mathbf{r}_{m,m-2}^2) \mathbf{r}_{m-1,m-2}^2 \mathbf{s}_{m-2}^2$	$(1 - \mathbf{r}_{m,m-2}^2) (1 - \mathbf{r}_{m-1,m-2}^2) \mathbf{s}_{m-2}^2$	0	0
...					0
...					0
$\mathbf{s}_1^2$	$\mathbf{r}_{m,1}^2 \mathbf{s}_1^2$	$(1 - \mathbf{r}_{m,1}^2) \mathbf{r}_{m-1,1}^2 \mathbf{s}_1^2$	$(1 - \mathbf{r}_{m,1}^2) (1 - \mathbf{r}_{m-1,1}^2) \mathbf{r}_{m-2,1}^2 \mathbf{s}_1^2$	...	$(1 - \mathbf{r}_{m,1}^2) \dots (1 - \mathbf{r}_{2,1}^2) \mathbf{s}_1^2$

Tableau 1

Les coefficients  $u(i,j)$  et  $d(i,j)$  sont donnés par :

$$u(i,j) = e^{\frac{1}{m} r \Delta t - \frac{1}{2} \mathbf{s}_{i,j}^2 \Delta t + \mathbf{s}_{i,j} \sqrt{\Delta t}} \quad d(i,j) = e^{\frac{1}{m} r \Delta t - \frac{1}{2} \mathbf{s}_{i,j}^2 \Delta t - \mathbf{s}_{i,j} \sqrt{\Delta t}}$$

Pour qu'il y ait absence d'opportunité d'arbitrage entre les actifs risqués, au cours de la  $j^{\text{ème}}$  sous période d'une période donnée, il est nécessaire de vérifier les égalités suivantes :

$$p_j = \frac{e^{\frac{1}{m} r \Delta t} - d(1,j)}{u(1,j) - d(1,j)} = \frac{e^{\frac{1}{m} r \Delta t} - d(2,j)}{u(2,j) - d(2,j)} = \dots = \frac{e^{\frac{1}{m} r \Delta t} - d(m+1-j,j)}{u(m+1-j,j) - d(m+1-j,j)}$$

Où  $p_j$  est la probabilité de hausse de l'actif  $S_{m+1-j}$ , au cours de la  $j^{\text{ème}}$  sous période. Ces égalités sont vérifiées pour un développement de Taylor à l'ordre 1 en  $\Delta t$  (Confère première partie). Dans la suite de l'exposé,  $N$  est supposé suffisamment grand pour que l'estimation  $p_j = \frac{1}{2} \in \{1, \dots, m\}$ , puisse être réalisée.

## A. Respect des rendements des processus de diffusion

### a) Respect des moments d'ordre 1 et 2 au cours d'une période

Pour un actif  $S_i$  donné, le nombre d'états de la nature, correspondant à des valeurs différentes à la fin de la première période, est  $2^{m+1-i}$ . Le nombre d'états correspondant à la même valeur est donc  $2^{i-1}$ .

Un chemin d'évolution du prix de l'actif peut être représenté par un couple de fonctions  $(\mathbf{y}_h(\cdot), \mathbf{y}_b(\cdot))$  où  $\mathbf{y}_h(k) = 1$ , si le prix de l'actif a été multiplié par un coefficient  $u(\cdot, \cdot)$  au cours de la  $k^{\text{ème}}$  sous période et 0 sinon et  $\mathbf{y}_b(k) = 1$  si le prix de l'actif a été multiplié par un coefficient  $d(\cdot, \cdot)$  au cours de la  $k^{\text{ème}}$  sous période et 0 sinon<sup>9</sup>.

Un état quelconque de l'actif  $S_i$  en fin de période s'écrit donc sous la forme suivante :

$$S_i e^{\frac{i-1}{m} r \Delta t} \prod_{k=1}^{m+1-i} \{u(i,k) \mathbf{y}_h(k) + d(i,k) \mathbf{y}_b(k)\}$$

Soit encore en remplaçant les coefficients  $u(i,k)$  et  $d(i,k)$  par leurs valeurs :

$$S_i e^{rDt} \prod_{k=1}^{m+1-i} e^{-\frac{1}{2} s_{i,k}^2 Dt} \left( e^{s_{i,k} \sqrt{Dt}} \mathbf{y}_h(k) + e^{-s_{i,k} \sqrt{Dt}} \mathbf{y}_b(k) \right)$$

Le rendement  $x$  de cet état se calcule aisément :

$$x = \left[ rDt - \frac{1}{2} s_i^2 Dt + \sum_{k=1}^{m+1-i} \left( s_{i,k} \sqrt{Dt} \mathbf{y}_h(k) - s_{i,k} \sqrt{Dt} \mathbf{y}_b(k) \right) \right]$$

On déduit, de manière immédiate, l'espérance du rendement  $X_i$  de l'actif  $S_i$  au cours de la première période :

$$E(X_i) = rDt - \frac{1}{2} s_i^2 Dt$$

L'étude porte à présent sur la variance du rendement  $X_i$ .

Soit  $v$ , donné par :

$$v = \left[ \ln \left( e^{\frac{i-1}{m} rDt} \prod_{k=1}^{m+1-i} \left( u(i,k) \mathbf{y}_h(k) + d(i,k) \mathbf{y}_b(k) \right) \right) \right]^2$$

Ou encore,

$$v = s_i^2 Dt \left\{ \sum_{k=1}^{m+1-i} \left( \mathbf{c}_{m+1-i=k} + \mathbf{r}_{m+1-k,i} \mathbf{c}_{m+1-i \neq k} \right) \times \left( \mathbf{c}_{k=1} + \prod_{h=1}^{j-1} \sqrt{1 - \mathbf{r}_{m+1-h,i}^2} \right) \times \left( \mathbf{y}_h(k) - \mathbf{y}_b(k) \right) \right\}^2 + O(\sqrt{Dt})^3$$

En développant, il vient

$$v = s_i^2 Dt \left\{ \sum_{k=1}^{m+1-i} \left( \mathbf{c}_{m+1-i=k} + \mathbf{r}_{m+1-k,i} \mathbf{c}_{m+1-i \neq k} \right) \left( \mathbf{c}_{k=1} + \prod_{h=1}^{k-1} \sqrt{1 - \mathbf{r}_{m+1-h,i}^2} \right) \left( \mathbf{y}_h(k) - \mathbf{y}_b(k) \right) \right\}^2$$

$$+ 2 \sum_{k=1}^{m+1-i} \sum_{g=1, g \neq k}^{m+1-i} \left( \mathbf{c}_{m+1-i=k} + \mathbf{r}_{m+1-k,i} \mathbf{c}_{m+1-i \neq k} \right) \left( \mathbf{c}_{k=1} + \prod_{h=1}^{k-1} \sqrt{1 - \mathbf{r}_{m+1-h,i}^2} \right) \left( \mathbf{y}_h(k) - \mathbf{y}_b(k) \right)$$

$$\times \left( \mathbf{c}_{m+1-i=g} + \mathbf{r}_{m+1-g,i} \mathbf{c}_{m+1-i \neq g} \right) \left( \mathbf{c}_{g=1} + \prod_{h=1}^{l-1} \sqrt{1 - \mathbf{r}_{m+1-h,i}^2} \right) \left( \mathbf{y}_h(g) - \mathbf{y}_b(g) \right) \left. \right\} + O(\sqrt{Dt})^3$$

Ce qui revient à :

$$v = s_i^2 Dt \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^{m+1-i} \sum_{g=1, g \neq k}^{m+1-i} \left( \mathbf{c}_{m+1-i=k} + \mathbf{r}_{m+1-k,i} \mathbf{c}_{m+1-i \neq k} \right) \left( \mathbf{c}_{k=1} + \prod_{h=1}^{k-1} \sqrt{1 - \mathbf{r}_{m+1-h,i}^2} \right) \left( \mathbf{y}_h(k) - \mathbf{y}_b(k) \right) \right.$$

$$\left. \times \left( \mathbf{c}_{m+1-i=g} + \mathbf{r}_{m+1-g,i} \mathbf{c}_{m+1-i \neq g} \right) \left( \mathbf{c}_{g=1} + \prod_{h=1}^{l-1} \sqrt{1 - \mathbf{r}_{m+1-h,i}^2} \right) \left( \mathbf{y}_h(g) - \mathbf{y}_b(g) \right) \right\} + O(\sqrt{Dt})^3$$

Dès lors, il est trivial de vérifier à partir de ce résultat que la variance du rendement  $X_i$  de l'actif risqué  $S_i$  converge vers celle du processus continu.

$$Var(X_i) = s_i^2 Dt + O(\sqrt{Dt})^3$$

Soit à présent  $S_i$  et  $S_j$ ,  $i < j$ , deux actifs risqués distincts. Soit  $c$ , donné par :

$$c = \ln \left( e^{\frac{i-1}{m} r D t} \prod_{k=1}^{m+1-i} (u(i, k) \mathbf{y}_h(k) + d(i, k) \mathbf{y}_b(k)) \right) \ln \left( e^{\frac{j-1}{m} r D t} \prod_{k=1}^{m+1-j} (u(j, k) \mathbf{y}_h(k) + d(j, k) \mathbf{y}_b(k)) \right)$$

Alors,

$$c = \mathbf{s}_i \mathbf{s}_j D t \left\{ \sum_{k=1}^{m+1-i} \left[ (\mathbf{c}_{m+1-i=k} + \mathbf{r}_{m+1-k, i} \mathbf{c}_{m+1-i \neq k}) \left( \mathbf{c}_{k=1} + \prod_{h=1}^{k-1} \sqrt{1 - \mathbf{r}_{m+1-h, i}^2} \right) (\mathbf{y}_h(k) - \mathbf{y}_b(k)) \right] \right. \\ \left. \times \sum_{l=1}^{m+1-j} \left[ (\mathbf{c}_{m+1-j=l} + \mathbf{r}_{m+1-l, j} \mathbf{c}_{m+1-j \neq l}) \left( \mathbf{c}_{l=1} + \prod_{h=1}^{l-1} \sqrt{1 - \mathbf{r}_{m+1-h, j}^2} \right) (\mathbf{y}_h(l) - \mathbf{y}_b(l)) \right] \right\} \\ + O(\sqrt{D t})^3$$

De l'expression précédente, la covariance entre les rendements  $X_i$  et  $X_j$  des actifs  $S_i$  et  $S_j$  se déduit facilement :

$$Cov(X_i, X_j) = \mathbf{s}_i \mathbf{s}_j D t \sum_{k=1}^{m+1-j} \left[ (\mathbf{c}_{m+1-i=k} + \mathbf{r}_{m+1-k, i} \mathbf{c}_{m+1-i \neq k}) \left( \mathbf{c}_{k=1} + \prod_{h=1}^{k-1} \sqrt{1 - \mathbf{r}_{m+1-h, i}^2} \right) \right. \\ \left. \times (\mathbf{c}_{m+1-j=k} + \mathbf{r}_{m+1-k, j} \mathbf{c}_{m+1-j \neq k}) \left( \mathbf{c}_{k=1} + \prod_{h=1}^{l-1} \sqrt{1 - \mathbf{r}_{m+1-h, j}^2} \right) \right] + O(\sqrt{D t})^3$$

A l'aide du tableau 1 donnant les variances sous périodiques, il est facile d'obtenir la limite, lorsque  $N$  tend vers l'infini, du coefficient de corrélation et a fortiori de la covariance entre les rendements de deux actifs risqués. Il suffit de sommer les produits des variances sous périodiques des deux actifs sur chaque sous période.

Ainsi, à la limite :

- Le coefficient de corrélation entre les actifs  $S_m$  et  $S_{m-j}$ ,  $j \geq 1$ , est donné par :

$$1 \times \rho_{m, m-j} + 0 \times \sqrt{1 - \rho_{m, m-j}^2} + 0 \times 0 + \dots + 0 \times 0$$

- Le coefficient de corrélation entre les actifs  $S_{m-1}$  et  $S_{m-j}$ ,  $j \geq 2$ , est donné par :

$$\mathbf{r}_{m, m-1} \times \mathbf{r}_{m, m-j} + \sqrt{1 - \mathbf{r}_{m, m-1}^2} \times \sqrt{1 - \mathbf{r}_{m, m-j}^2} \mathbf{r}_{m-1, m-j} + 0 \times \sqrt{1 - \mathbf{r}_{m, m-1}^2} \sqrt{1 - \mathbf{r}_{m-1, m-j}^2}$$

- Plus généralement, le coefficient de corrélation entre les actifs  $S_{m-i}$  et  $S_{m-j}$ ,  $j \geq i+1$ , est donné par :

$$\mathbf{r}_{m, m-i} \times \mathbf{r}_{m, m-j} + \sqrt{1 - \mathbf{r}_{m, m-i}^2} \mathbf{r}_{m-1, m-i} \times \sqrt{1 - \mathbf{r}_{m, m-j}^2} \mathbf{r}_{m-1, m-j} + \dots \\ + \sqrt{1 - \mathbf{r}_{m, m-i}^2} \dots \sqrt{1 - \mathbf{r}_{m-i, m-i}^2} \times \sqrt{1 - \mathbf{r}_{m, m-j}^2} \dots \sqrt{1 - \mathbf{r}_{m-i, m-j}^2} \mathbf{r}_{m-i-1, m-j} \quad (8)$$

Afin de respecter la matrice des variances-covariances des rendements des actifs, il est nécessaire d'ajuster les pseudo coefficients de corrélation. Ces derniers se calculent aisément par une méthode itérative. Remarquons tout d'abord que les coefficients  $\mathbf{r}_{m, m-j}$ ,  $j \geq 1$ , représentent les coefficients de corrélation réels entre les rendements des actifs  $S_m$  et  $S_{m-j}$ . Calculons à présent les coefficients  $\mathbf{r}_{m-1, m-j}$ ,  $j \geq 2$ . En égalisant le coefficient de corrélation réel avec l'expression donnant le coefficient de corrélation entre  $S_{m-1}$  et  $S_{m-j}$ , on obtient une équation à une inconnue :  $\mathbf{r}_{m-1, m-j}$ . Il suffit de la résoudre pour obtenir la valeur  $\mathbf{r}_{m-1, m-j}$ . On procède de même avec les étapes suivantes, calculant ainsi dans l'ordre les pseudo coefficients  $\mathbf{r}_{m-2, m-j}$ ,  $j \geq 3$ ,  $\mathbf{r}_{m-3, m-j}$ ,  $j \geq 4$ , ...,  $\mathbf{r}_{2, 1}$ .



## b) Convergence en loi

La démonstration de la convergence des distributions des rendements vers des lois normales se généralise aisément à partir de la démonstration effectuée en présence de deux actifs risqués sous-jacents. Pour l'actif risqué  $S_{m+1-i}$ , il suffit de montrer que les  $i$  distributions binomiales qui constituent en partie ses trajectoires convergent vers  $i$  lois normales indépendantes auxquelles se rajoutent  $m-i$  lois déterministes indépendantes. Ce premier travail réalisé, il suffit de vérifier le respect des corrélations des rendements entre deux actifs risqués  $S_{m+1-i}$  et  $S_{m+1-j}$ . Supposons  $i > j$ . Au cours des  $i$  premières sous périodes, les rendements des deux actifs sont parfaitement corrélés. Au cours des sous périodes suivantes, les rendements des deux actifs sont parfaitement non corrélés. Et à l'aide des résultats établis précédemment, il est facile de montrer que les corrélations des rendements des actifs sont respectées.

## III. Applications

Cette troisième partie a pour but d'illustrer le modèle en l'appliquant au cas d'options dépendant de deux ou trois actifs risqués.

### A. Option contingente à deux actifs risqués : comparaison avec le modèle de Stulz (1982)

Les formules fermées permettant l'évaluation des options européennes sur maximum ou sur minimum de deux actifs risqués, sous les hypothèses semblables à celles du modèle de Black et Scholes (1973), ont été obtenues par Stulz en 1982. Par exemple, pour un call sur minimum de deux actifs, il obtient :

$$C_{min} = S_1 \times N_2 \left( \mathbf{g}_1 + \mathbf{s}_1 \sqrt{t}, \mathbf{a}_1, \frac{\mathbf{q}_{1,2} \mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1}{\mathbf{s}} \right) + S_2 \times N_2 \left( \mathbf{g}_2 + \mathbf{s}_2 \sqrt{t}, \mathbf{a}_2, \frac{\mathbf{q}_{1,2} \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2}{\mathbf{s}} \right) - Ke^{-rt} N_2(\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_1, \mathbf{q}_{1,2})$$

avec :

- $S_1$  et  $S_2$  les prix respectifs du premier et du second actif risqué
- $\mathbf{s}_1$  et  $\mathbf{s}_2$  les volatilités des rendements respectifs du premier et du second actif risqué
- $K$  le prix d'exercice
- $t$  la maturité de l'option
- $N_2(a,b,c)$  la fonction de répartition de la loi normale bivariée ayant  $a$  et  $b$  pour bornes d'intégration et  $c$  pour coefficient de corrélation
- $\mathbf{q}_{1,2}$  le coefficient de corrélation entre les deux rendements
- $\mathbf{s} = \sqrt{\mathbf{s}_1^2 + \mathbf{s}_2^2 - 2\mathbf{q}_{1,2}\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2}$
- $\mathbf{g}_1 = \frac{\ln \frac{S_1}{K} + \left( r - \frac{1}{2} \mathbf{s}_1^2 \right) t}{\mathbf{s}_1 \sqrt{t}}$        $\mathbf{g}_2 = \frac{\ln \frac{S_2}{K} + \left( r - \frac{1}{2} \mathbf{s}_2^2 \right) t}{\mathbf{s}_2 \sqrt{t}}$
- $\mathbf{a}_1 = \frac{\ln \frac{S_2}{S_1} - \frac{1}{2} \mathbf{s}^2 t}{\mathbf{s} \sqrt{t}}$        $\mathbf{a}_2 = \frac{\ln \frac{S_1}{S_2} - \frac{1}{2} \mathbf{s}^2 t}{\mathbf{s} \sqrt{t}}$

Les autres prix se déduisent de cette première formule et de celle de BS donnant le prix d'une option sur un seul actif.

L'exemple suivant permet de comparer les prix théoriques obtenus, pour ce type d'option, par le modèle de Stulz avec ceux fournis par l'approche séquentielle.

Les données sont :

- $S_1 = 100$  ;  $S_2 = 90$  ;
- $s_1 = 20\%$  ;  $s_2 = 25\%$  ;
- $q_{1,2} = -0.5$  ;
- $t : 1$  an ;  $K = 95$  ;  $r : 5\%$  ;
- Nombre de périodes de discrétisation du modèle séquentiel : 200.

Les prix théoriques calculés sont regroupés dans le tableau ci dessous :

	<i>Call sur Minimum</i>	<i>Call sur Maximum</i>	<i>Put sur Minimum</i>	<i>Put sur Maximum</i>
<i>Stulz</i>	1.646	20.489	12.244	0.625
<i>Arbre Séquentiel</i>	1.644	20.492	12.246	0.624

Tableau 2

L'attrait de l'approche séquentielle par rapport au modèle de Stulz est de permettre un plus grand nombre d'applications et de prendre en compte l'éventuel caractère américain du produit optionnel.

### *B. Option contingente à trois actifs risqués : Comparaison avec le modèle de Boyle, Evnine et Gibbs (1989)*

L'illustration du modèle est poursuivie dans le cas où le prix de l'option est conditionnel à trois actifs risqués. Les résultats calculés sont comparés à ceux présentés par BEG dans leur article. Rappelons que le modèle de BEG permet, grâce à la construction d'arbres lasers, d'évaluer une grande variété d'options telles que notamment les options sur maximum, minimum ou moyenne, ... de plusieurs actifs.

Dans l'exemple, il est supposé que :

- $S_1 = S_2 = S_3 = 100$  ;
- $s_1 = s_2 = s_3 = 20\%$  ;
- $q_{1,2} = q_{1,3} = q_{2,3} = 0.5$  ;
- $t : 1$  an ;  $K = 100$  ;  $r : 10\%$ .

Une première étape consiste à estimer l'ensemble des pseudo coefficients de corrélation. Ici, un seul coefficient est à déterminer, celui entre les rendements des actifs  $S_1$  et  $S_2$ . Il est aisément calculable :

$$r_{1,2} = \frac{q_{1,2} - q_{2,3}q_{1,3}}{\sqrt{1 - q_{2,3}^2} \sqrt{1 - q_{1,3}^2}} = \frac{1}{3}$$

Le tableau suivant présente les résultats obtenus par l'approche séquentielle pour le prix des options avec ceux obtenus par BEG mis entre parenthèses.

Nombre de Périodes	Call Sur Maximum	Call Sur Minimum	Put Sur Maximum	Put Sur Minimum
20	22.684 (22.281)	5.235 (5.226)	0.929 (0.919)	7.415 (7.240)
40	22.686 (22.479)	5.251 (5.237)	0.937 (0.925)	7.421 (7.323)
60	22.684 (22.544)	5.256 (5.241)	0.938 (0.928)	7.422 (7.350)
80	22.678 (22.576)	5.249 (5.243)	0.934 (0.929)	7.413 (7.403)
93	22.680 (22.672)	5.251 (5.249)	0.936 (0.936)	7.415 (7.403)

Tableau 3

Par rapport au modèle de BEG, les résultats fournis par ce modèle apparaissent plus stables en fonction du nombre de périodes de discrétisation. Par ailleurs, l'un des intérêts de cette approche résulte de l'ajustement des coefficients multiplicatifs plutôt que de celui des probabilités. En effet, cette démarche présente l'avantage de garantir l'obtention d'un système de probabilités cohérent, ce que ne permet pas toujours le modèle de BEG.

#### IV. Classification du prix des options

L'équiprobabilité des états engendrés successifs à un nœud père constitue un avantage conséquent dans l'application de la méthode séquentielle à la classification d'options. Par exemple, il est démontré ci-après, qu'il est possible dans de nombreux cas de classer des options, par ordre de prix croissant, sans même avoir à parcourir l'arbre.

##### A. Indépendance des prix d'Arrow-Debreu par rapport aux caractéristiques des actifs sous-jacents

L'un des avantages qu'offre l'arbre de Jarrow et Rudd est que les prix d'Arrow-Debreu sont indépendants des caractéristiques de l'actif sous-jacent. En effet, la probabilité  $P_{n,i}$  d'atteinte du nœud correspondant à l'état  $(n,i)$ ,  $n$  périodes et  $i$  hausses du prix de l'actif sous-jacent, est donnée par :

$$P_{n,i} = \frac{1}{2^n} \binom{n}{i}$$

Ces probabilités sont facilement étendues dans le cadre de l'approche séquentielle. Par exemple, en présence de  $m$  actifs risqués, la probabilité  $P_{n,i_1,i_2,\dots,i_m}$  d'atteinte du nœud correspondant à l'état  $(n,i_1,i_2,\dots,i_m)$ ,  $n$  périodes,  $i$  hausses du  $m^{\text{ème}}$  actif sous-jacent au cours de la première sous période, ... et  $i_m$  hausses du premier actif risqué au cours de la  $m^{\text{ème}}$  sous période est donnée par :

$$P_{n,i_1,i_2,\dots,i_m} = \frac{1}{(2^m)^n} \binom{n}{i_1} \binom{n}{i_2} \dots \binom{n}{i_m}$$

Ces probabilités sont donc indépendantes des caractéristiques des actifs sous-jacents.

##### B. Application à la classification des options

Soit à présent deux calls européens sur maximum de deux actifs, le premier portant sur les actifs  $S_1$  et  $S_2$  et le second étant conditionnels aux actifs<sup>10</sup>  $S_2$  et  $S_3$ . Le but est de déterminer, sans calculer la valeur des deux calls, celui dont la valeur est la plus élevée.

Dans de nombreux cas, l'approche séquentielle permet de résoudre ce problème avec un nombre très limité de calculs. Ce résultat est une conséquence de l'indépendance des probabilités d'atteinte des nœuds par rapport aux caractéristiques des actifs. Il suffit de comparer les valeurs finales des prix obtenus pour les deux arbres<sup>11</sup>. Supposons tout d'abord

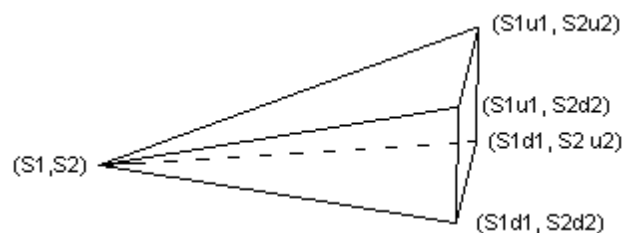
que les corrélations entre les rendements des actifs  $S_1$  et  $S_2$  d'une part, et les rendements des actifs  $S_2$  et  $S_3$  d'autre part soient du même signe. Alors, si pour tout état  $(n, i_1, i_2)$  la valeur terminale du premier call est supérieure ou égale à la valeur correspondant au même état  $(n, i_1, i_2)$  pour l'autre call, le premier call a un prix supérieur au second. Cette conséquence est facilement démontrable grâce à l'indépendance des probabilités par rapport aux caractéristiques des actifs. Lorsque les coefficients de corrélation sont de signes opposés, la méthode reste applicable. Toutefois, il est plus efficace de comparer les valeurs des états  $(n, i_1, i_2)$  pour le premier call avec les valeurs des états  $(n, i_1, Ent\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - i_2)$  pour le second call<sup>12</sup>, où  $Ent\lfloor k \rfloor$  désigne la partie entière minorée de  $k$ .

Comparer chaque état est une condition suffisante pour classer les calls par ordre de prix croissant. D'autres procédures encore plus performantes, permettant de déduire directement l'ordre pour chaque état final des prix des deux calls, peuvent être basées à la fois sur les prix minimum finaux des actifs, au dessus desquels l'option est exercée à l'échéance, et sur les coefficients multiplicatifs  $u(i, j)$  à la hausse de chaque actif.

## Conclusion

Cet article a mis en évidence l'existence d'opportunités d'arbitrage dans l'approche séquentielle d'évaluation d'un actif contingent à deux actifs risqués proposée par Kishimoto (1987). Des améliorations ont été obtenues en substituant le modèle de Jarrow et Rudd (1981) à celui de Cox, Ross et Rubinstein (1979). L'approche a ensuite été généralisée au cas d'une option dépendant de plusieurs actifs risqués sous-jacents. Le modèle a été appliqué pour des options contingentes à deux ou trois actifs et la convergence du modèle a pu être vérifiée. Le champ d'application de ce type de modèle dépasse le simple cas de l'évaluation des options sur le maximum ou le minimum de plusieurs actifs. Enfin, les options réelles et les stratégies d'allocation d'actifs pourraient bénéficier de la méthode de classification du prix des options.

<sup>1</sup> Exemple : en présence de deux actifs de prix  $S_1$  et  $S_2$  l'arbre laser d'évolution est un arbre tridimensionnel qui peut être représenté comme suit :



Où  $u_1, u_2, d_1$  et  $d_2$  sont des coefficients multiplicateurs.

<sup>2</sup> Ne pas confondre avec l'article "Return to Oz" de Rubinstein (1994), dans lequel un arbre laser est proposé.

<sup>3</sup> L'extension de l'approche à une structure des taux déterministe est immédiate. Dans ce cas les coefficients multiplicatifs  $u(\ )$  et  $d(\ )$  des actifs risqués ne sont plus constants au cours du temps. Toutefois, l'arbre reste recombinaut et les probabilités sont inchangées. La preuve de la convergence du modèle est la même que celle apportée plus loin dans l'article.

<sup>4</sup> L'hypothèse initialement écrite par Kishimoto a été modifiée. Au cours de la première sous période, Kishimoto supposait une hausse des actifs ou une baisse des actifs. Pourtant, si le signe du coefficient de corrélation est négatif, une hausse de l'actif  $S_2$  est accompagnée d'une baisse de l'actif  $S_1$ .

<sup>5</sup> Dans ce cas, il faut noter que seul un coefficient de corrélation positif est envisageable.

<sup>6</sup> Le modèle de Jarrow et Rudd est ici succinctement présenté.

Soit  $S$ , le prix d'une action supposé suivre, dans l'univers risque neutre, le mouvement brownien géométrique suivant :  $\frac{dS}{S} = r \cdot dt + \sigma \cdot d\hat{Z}$ . En posant  $X = \text{Log } S$  et en appliquant le lemme d'Itô, il vient :

$$dX = \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma d\hat{Z} .$$

En intégrant de  $t$  à  $T$ , on obtient :

$$\text{Log} \frac{S(T)}{S(t)} = \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t) + \sigma (\hat{Z}(T) - \hat{Z}(t))$$

ou 
$$S(T) = S(t) \exp \left[ \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t) + \sigma (\hat{Z}(T) - \hat{Z}(t)) \right]$$

Ce résultat constitue l'une des raisons pour lesquelles Jarrow et Rudd proposent de diffuser le prix de l'action en

intégrant le coefficient déterministe  $e^{\left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \mathbf{D}t}$  :

$$S \begin{cases} e^{\left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \mathbf{D}t + \sigma \sqrt{\mathbf{D}t}} \\ e^{\left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \mathbf{D}t - \sigma \sqrt{\mathbf{D}t}} \end{cases}$$

De la sorte, les probabilités de hausse et de baisse de l'actif dans l'univers risque neutre peuvent être estimées par  $\frac{1}{2}$  (cette estimation est exacte pour un développement de Taylor à l'ordre 1 en  $\Delta t$ ).

<sup>7</sup> Lorsque les deux actifs sont parfaitement corrélés, la différence  $u_{1,2} - d_{1,2}$  est nulle et la probabilité  $q$  de hausse de l'actif risqué au cours de la deuxième sous période n'existe pas. Dans ce cas, il est nécessaire de modifier l'arbre de Kishimoto. Au delà de ce cas particulier, lorsque les deux actifs sont fortement corrélés et que la différence est proche de 0, des erreurs numériques peuvent apparaître.

<sup>8</sup> la valeur absolue de  $r_{ij}$  peut être supérieure à 1.

<sup>9</sup> En conséquence,  $\Psi_b(\cdot) = 1 - \Psi_h(\cdot)$ . Ceci implique que : 
$$E \left\{ \sum_{\substack{\text{tous les chemins} \\ \text{possibles}}} [\mathbf{Y}_h - \mathbf{Y}_b] \right\} = 2 \sum E\{\mathbf{Y}_h\} - \sum 1 = 0$$

<sup>10</sup> Il pourrait être considéré quatre actifs différents deux à deux.

<sup>11</sup> La comparaison, à l'échéance, des valeurs nécessite au plus  $n^m$  comparaisons de nombres tandis que le calcul de l'arbre nécessite au moins  $4 \sum_{i=1}^n i^m$  calculs.

<sup>12</sup> Il est aisé de vérifier que ces deux états "symétriques" ont les mêmes probabilités d'atteinte.

## REFERENCES

**AUGROS J. C.** et **QUERUEL M.**, "Modèle d'évaluation d'un actif contingent aux taux d'intérêt et à deux actifs risqués", *colloque AFIR Cairns Australie*, juillet 1997 et *14<sup>ème</sup> conférence internationale de finance AFFI*, Grenoble, juin 1997.

**AUGROS J. C.** et **MORENO M.**, "Evaluation séquentielle d'un actif contingent aux taux et à un actif risqué", *Cahiers de recherche de l'ISFA*, n° 9801.

**BLACK F.** et **SCHOLES F.**, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, Vol 81, n°3, 1973, p 637-659.

**BOYLE P.P.**, "A Lattice Framework for Option Pricing with 2 State Variables", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol 23, n° 1, March 1988, p 1 - 12.

**BOYLE P.P.**, **EVNINE J.** et **GIBBS S.**, "Numerical Evaluation of Multivariate Contingent Claims", *Review of Financial Studies*, vol 2, n°2, 1989, p 241-250.

---

**BOYLE P.P.** and **LIN X.**, "Valuation of Options on Several Risky Assets when there are Transactions Costs ", *Advances in Futures and Options Research*, Vol 9, 1997, p 111 - 129.

**CHEYETTE O.**, "Pricing Options on Multiple Assets", *Advances in Futures and Options Research*, vol 4, 1990, p69-81.

**COX J., ROSS S.** and **RUBINSTEIN M.**, "Option Pricing : A Simplified Approach", *Journal of Financial Economics*, vol 7, 1979, p229-263.

**COX J.** and **RUBINSTEIN M.**, "Option Markets", *Ed Prentice Hall*, 1985.

**EVNINE J.J.**, "Three Essays in the Use of Option Pricing Theory", Thèse, *Université de Californie, Berkeley*, 1983.

**HE H.**, "Convergence from Discrete to Continuous Time Financial Model", *Walter A. HAAS SCHOOL of Business Research program in finance Working Paper Series*, October 1989, University of California at Berkeley, finance Working Paper N° 190 (et 199).

**HULL J.**, "Options, Futures, and Other Derivatives", Prentice Hall International Editions, 3<sup>rd</sup> Edition, 1995.

**JARROW R.** and **RUDD A.**, "Option Pricing", *Ed Irwin, Homewood*, 1983.

**KISHIMOTO N.**, "Pricing of Asset-Linked Bonds Under Interest Rate Risk", Faculty of Graduate School of Business Administration, New York University, thesis august 1987, appendix A, p96-112.

**MARGRABE W.**, "The Value of an Option to Exchange One Asset to Another", *Journal of Finance*, vol 33, 1978, p177-186.

**RUBINSTEIN M.**, "Return to Oz", *RISK*, Novembre 1994.

**RUBINSTEIN M.**, "Exotic Options", ", *Walter A. HAAS SCHOOL of Business Research program in finance Working Paper Series*, Décembre 1991, University of California at Berkeley, finance Working Paper N° 220.

**STAPELTON R.** and **SUBRAHMANYAM**, "The Valuation of Multivariate Contingent Claims in Discrete Time Models", *Journal of Finance*, vol 39, 1984, p207.

**STULZ R.**, "Options on the Minimum or the Maximum of two Risky Assets", *Journal of Financial Economics*, vol 10, 1982, p161-185.