

EVALUATION PARTIELLEMENT SEQUENTIELLE DES OPTIONS A BARRIERE

Jean-Claude AUGROS
Professeur à l'ISFA
Université Claude Bernard Lyon I
Bât 101 – ISFA
43, Bd du 11 novembre 1918
69622 – Villeurbanne CEDEX

Michaël MORENO
Allocataire – Moniteur
Université Claude Bernard Lyon I
Bât 101 – ISFA
43, Bd du 11 novembre 1918
69622 – Villeurbanne CEDEX

Version Provisoire
Le 29 janvier 1999

Résumé :

Malgré les avancées dues à Ritchken (1995) et Cheuk et Vorst (1996), l'évaluation des options à barrières à l'aide d'arborescences présente encore des difficultés et n'est envisageable que pour les options à simple ou double barrières. La méthode proposée, qualifiée de partiellement séquentielle, convient pour la majorité des types d'options à barrières et particulièrement pour celles où la ou les barrières sont proches du prix initial de l'actif risqué. Elle présente l'avantage de ne pas nécessiter d'ajustement du nombre de périodes de discrétisation, de permettre la prise en compte de plusieurs barrières et de ne pas modifier le treillis trinomial de base.

Abstract :

Thanks to Cheuk and Vorst (1996), valuing barrier option in a lattice doesn't remain difficult when the barrier is near from the initial value of the risky asset. However their method can't fit more than 2 barriers. To give a response, we introduce a partially sequential approach. Very useful for the option including one or more barriers near from the initial asset price option, it has the peculiarity to give unnecessary the adjustment of the number of time steps.

Mots clés :

Approche séquentielle, arbre trinomial, barrière, option.

keywords :

Barrier, Option, Sequential Approach, Trinomial Lattice.

Evaluation des options à barrière selon une approche partiellement séquentielle

Les options à barrière sont des options dont la valeur est conditionnée par l'évolution, pendant leur durée de vie, du prix du sous-jacent par rapport à un ou plusieurs seuils. Il en existe diverses sortes comme, par exemple, les options à barrières désactivantes "*out*" (la valeur de l'option s'annule si le cours du sous-jacent franchit la barrière à la hausse (option de type *up*) ou à la baisse (option de type *down*)), les options à barrières activantes "*in*" (le payoff de l'option est nul si le cours du sous-jacent ne franchit pas la barrière), les options à barrières *outside* (la valeur de l'option est conditionnée par une barrière portant sur un autre actif), les *roll* options (il s'agit d'option à double barrières *down* ou *up*, dont le prix d'exercice est modifié quand la première barrière de type activante est atteinte, et dont la seconde barrière est de type désactivante), les *capped* options (options dont le payoff est plafonné par une ou plusieurs barrières). Au cours de ces dernières années, le volume des échanges sur ce type de contrat a considérablement augmenté, le nombre de lots échangés passant de 123 \$bn en 1992 à 2041 \$bn en 1996 (Cf Hans Hsu 1997).

L'existence d'une barrière a le plus souvent pour conséquence de réduire le risque du vendeur de l'option. Aussi la valeur d'une option à barrière est-elle généralement inférieure à celle d'une option classique, ou option vanille, équivalente. Ainsi, par exemple, il est possible de décomposer une option vanille en la somme de deux options européennes dotées de la même barrière, la première étant de type *in*, la seconde de type *out*.

La première méthode d'évaluation d'une option à barrière a été développée en temps continu par Merton (1973). La formule fermée proposée permet l'évaluation d'un call *down and out*. Reiner et Rubinstein (1991) devaient plus tard compléter la panoplie des formules analytiques d'évaluation d'options à barrière permettant d'évaluer tout à la fois les options activantes ou désactivantes, de type *up* comme de type *down*. D'autres approches en temps continu ont notamment été proposées par Heynen et Kat (1994 – options à barrière partielle), par Kunitomo et Ikeda (1992) ainsi que par Geman et Yor (1996) pour évaluer les options à double barrières.

Le recours à des méthodes discrètes a rapidement été envisagé afin de prendre en compte le caractère éventuellement américain des options à barrière ainsi que le versement non continu d'un dividende. Boyle et Lau (1994) ont montré qu'une utilisation naïve du modèle binomial de Cox, Ross et Rubinstein (CRR - 1979) était inadaptée et ne donnait pas lieu à une convergence rapide du prix d'une option. Il ressort également des travaux de ces derniers auteurs que, selon le niveau de la barrière, ou en présence d'une barrière non constante, il est souvent nécessaire, pour obtenir une évaluation correcte, d'accroître considérablement le nombre de pas de discrétisation ce qui rend les temps de calculs peu adaptés aux besoins des praticiens.

Comme l'a montré Ritchken (1994), l'arbre trinomial d'évolution de l'actif risqué, introduit par Boyle en 1988, présente un avantage par rapport au modèle binomial en donnant un degré de liberté supplémentaire utile pour l'évaluation des options à barrière. Dans ce cas, la possibilité de positionner l'un des niveaux de prix de l'arbre de l'actif risqué sur la valeur de la barrière garantit le respect de la distribution mathématique du prix de l'option, autorisant une convergence satisfaisante. Toutefois, il existe un nombre de périodes de périodes minimum en deçà duquel la méthode n'est pas applicable. Ce phénomène se rencontre lorsque la barrière est proche du prix initial de l'actif risqué. Pour résoudre cette difficulté, Cheuk et Vorst (1996) ont proposé de décaler le treillis trinomial de l'actif risqué à l'aide d'un terme multiplicatif afin que l'un des niveaux de prix de l'arbre corresponde à la valeur de la barrière.

Bien que permettant l'évaluation de nombreux types d'options, cette approche est cependant peu adaptée lorsque plus de deux barrières conditionnent le prix de l'option.

Cet article a pour objectif de proposer une amélioration de l'évaluation en temps discret des options à barrière. Il est ordonné de la façon suivante : une première section permet de préciser les limites des méthodes discrètes précédentes. Dans une seconde section, une nouvelle approche, qualifiée de partiellement séquentielle, est proposée. Cette méthode repose sur le sectionnement des périodes de discrétisation en plusieurs sous périodes, le nombre de barrières prises en compte n'étant alors plus limité et le nombre de périodes de discrétisation demeurant indépendant du niveau des barrières.

I. Evaluation des options à barrière selon les approches trinomiales

Le principe et les limites des trois approches de Boyle, de Ritchken et de Cheuk et Vorst pour l'évaluation des options à barrière sont successivement analysées.

A. Le modèle trinomial de Boyle

Le modèle d'évaluation d'une option sur un actif risqué de Boyle est proche de celui de CRR. Toutefois, le choix d'un processus discret trinomial, plutôt que binomial, donne un degré de liberté supplémentaire. A la différence du modèle de CRR qui suppose un marché complet, celui de Boyle considère un marché incomplet. Néanmoins, la convergence mathématique de l'approche trinomial est assurée. L'évaluation du prix d'une option par cette méthode est généralement plus précise que celle obtenue avec le modèle binomial, pour un nombre de périodes de discrétisation divisé par deux.

Les hypothèses du modèle sont les suivantes :

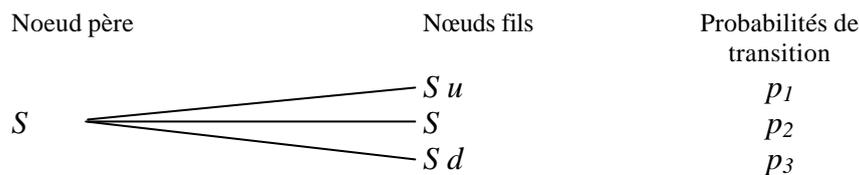
- H1 : le marché est sans friction. Il n'y a ni taxe, ni coût de transaction, ni restriction sur les ventes à découvert. Les titres sont parfaitement divisibles ;
- H2 : le taux d'intérêt r , exprimé en rendement annuel continu, est supposé constant ;
- H3 : Il est supposé qu'en temps continu, le prix, S , de l'actif est représenté par un processus brownien géométrique défini, dans l'univers risque neutre, par l'équation de diffusion suivante :

$$\frac{dS}{S} = r dt + \sigma d\hat{Z},$$

où σ désigne la volatilité du rendement de l'actif et où \hat{Z} est un brownien standard;

- H4 : l'intervalle de gestion est divisé en N périodes de longueur Δt identique. Les transactions ont lieu uniquement au début de chaque période ;
- H5 : Le processus d'évolution du prix de l'actif est assimilé, en temps discret, à un processus trinomial selon lequel ce prix varie, au cours de chaque période, en fonction de trois directions : hausse, stagnation et baisse. En cas de hausse, le prix de l'actif est multiplié par un coefficient u ; en cas de baisse, le prix est multiplié par un coefficient d ; en cas de stagnation, le prix reste inchangé. Les coefficients multiplicatifs sont supposés constants ce qui garantit la recombinaison de l'arbre.

L'approche développée par Boyle peut être représentée, dans l'univers risque neutre, par le schéma suivant :



Le système permettant de calculer les probabilités du processus trinomial pour un nœud quelconque de l'arbre est le suivant :

- respect de l'espérance de la distribution continue lognormale du prix de l'actif :

$$p_1 S u + p_2 S + p_3 S d = SM$$

- respect de la variance :

$$p_1 (S^2 u^2 - S^2 M^2) + p_2 (S^2 - S^2 M^2) + p_3 (S^2 d^2 - S^2 M^2) = S^2 V$$

- Somme des probabilités égale à 1.

où $M = \exp(rDt)$ et $V = M^2 [\exp(s^2 Dt) - 1]$

La résolution du système conduit à :

$$p_1 = \frac{(V + M^2 - M)u - (M - 1)}{(u - 1)(u^2 - 1)} \quad p_2 = 1 - p_1 - p_3 \quad p_3 = \frac{(V + M^2 - M)u^2 - u^3(M - 1)}{(u - 1)(u^2 - 1)}$$

L'ensemble des contraintes ne permet pas toujours d'obtenir un système de probabilités cohérent pour une période donnée. Boyle, qui suppose une volatilité du rendement de l'actif constante¹, propose de modifier les coefficients multiplicatifs u et d de CRR de la façon suivante :

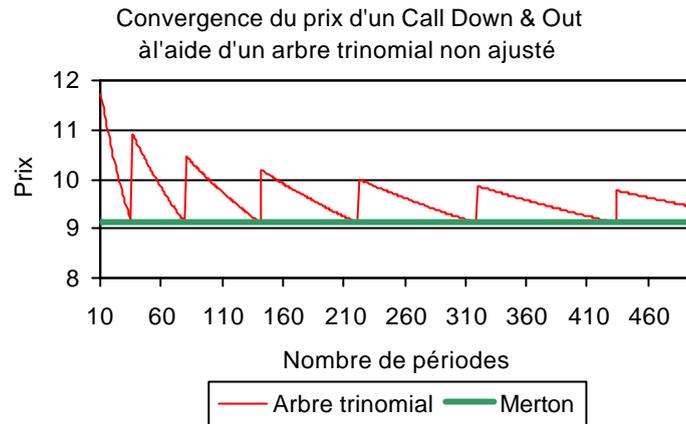
$$u = \exp(I s \sqrt{\Delta t}) \text{ et } d = \frac{1}{u},$$

où la valeur de I est adaptée de telle sorte que le système de probabilités obtenu reste cohérent quelle que soit la période considérée. L'étude menée par Boyle montre que la valeur $I=1,2$ permet généralement d'obtenir des probabilités sensiblement égales, ce qui accroît la vitesse de convergence de la méthode.

L'évaluation de l'actif optionnel est réalisée de manière classique dans l'univers risque neutre par actualisation des flux espérés. Une application simple du modèle de Boyle pour l'évaluation des options à barrières pose évidemment les mêmes problèmes de convergence que le modèle de CRR et exige le plus souvent une réduction importante du pas de calcul comme le suggère le graphique suivant.

Données initiales :

$S = 100$, Prix d'exercice = 100, $\sigma = 25\%$, Barrière = 90, $r = 5\%$.



B. Le modèle trinomial de Ritchken (1995)

L'évaluation des options à barrière par une méthode arborescente nécessite, pour des raisons de vitesse de convergence, d'adapter la construction de l'arbre des prix de l'actif en fonction du niveau de la barrière. En fait, il suffit de positionner un niveau de prix de l'arbre, exactement sur la valeur de la barrière pour que la distribution mathématique du prix de l'option soit respectée. En conséquence, l'emploi d'un arbre binomial est inadapté au problème étudié puisqu'il est nécessaire d'agir sur la durée des périodes de discrétisation et donc sur le nombre de pas de discrétisation². Le degré de liberté supplémentaire dû à l'utilisation d'un arbre trinomial permet d'ajuster très facilement l'arbre de sorte à faire coïncider l'un des niveaux de prix du treillis avec la barrière.

A l'aide du paramètre λ , Ritchken réalise cette condition.

Les niveaux du prix de l'actif au sein de l'arbre sont donnés par :

$$S_0 \cdot e^{k \lambda \sqrt{\Delta t}}$$

où k est un entier relatif compris³ entre $-\text{Ent}\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$ et $\text{Ent}\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$.

Afin que l'un des niveaux de prix correspondent au niveau B de la barrière, il faut et il suffit qu'il existe un entier relatif k , non nul et compris entre $-\text{Ent}\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$ et $\text{Ent}\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$ tel que :

$$B = S_0 \cdot e^{k \lambda \sqrt{\Delta t}} \quad \text{ou encore} \quad k = \frac{1}{\lambda \sqrt{\Delta t}} \ln \left(\frac{B}{S_0} \right)$$

Supposons λ préfixé et déterminons la valeur de k comme étant égale au plus petit entier non nul précédent le réel $\frac{1}{\lambda \sqrt{\Delta t}} \ln \left(\frac{B}{S_0} \right)$. Il n'existe alors qu'une seule et unique valeur de λ vérifiant l'équation précédente. Cette valeur est celle retenue par Ritchken.

La limite du modèle de Ritchken apparaît lorsque le niveau de la barrière est proche du prix initial de l'actif. Dans ce cas, en dessous d'un certain nombre de pas, il n'existe pas forcément d'entier k strictement positif en valeur absolue permettant d'ajuster le paramètre λ .

Par exemple, dans les conditions suivantes : $S = 100$, barrière = 99.5, $\sigma = 20 \%$, $\tau = 1$ an, un minimum de 1593 périodes est nécessaire. Sous les mêmes hypothèses, mais pour une barrière égale à 99.9, la méthode nécessite au moins 39961 périodes.

Selon Ritchken, si l'on excepte les cas où la barrière se situe à un niveau proche du cours initial de l'action, l'évaluation est stable et la méthode converge rapidement. Toutefois, un autre problème, dû à l'éloignement éventuel de la barrière par rapport au niveau initial de l'action, n'a pas été relevé par Ritchken. Celui ci peut être mis en évidence à l'aide des figures ci dessous.

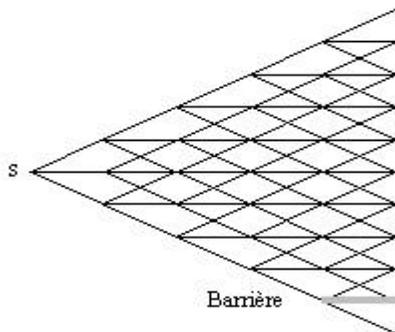


Figure 1

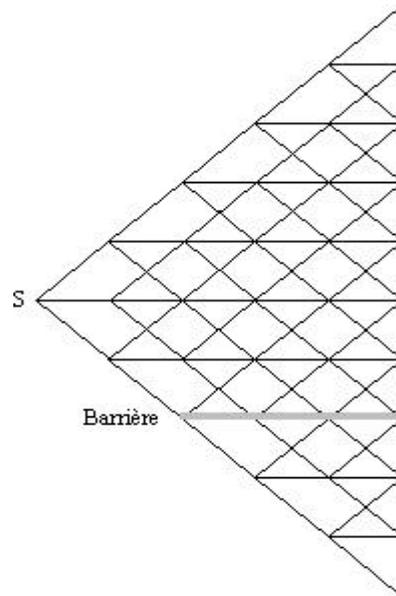


Figure 2

Dans le cas de la figure 1, la barrière est peu prise en compte dans l'évaluation de l'option. Il alors est préférable, comme c'est le cas dans la figure 2, d'augmenter la valeur de λ de telle sorte que le nombre de nœuds concernés par la barrière soit plus important. Ainsi construit, le nombre de nœuds de l'arbre intégrant l'information relative à la barrière est plus élevé. La déformation de l'arbre doit être telle qu'un nombre suffisant de périodes de discrétisation soient concernées par la barrière. Désignons par α le pourcentage du nombre de périodes pour lesquelles la barrière est atteinte.

La sensibilité de la méthode par rapport à ce paramètre est à présent illustrée par la comparaison des résultats obtenus par la formule fermée de Merton et par le modèle de Ritchken pour différentes valeurs de α . Le cas étudié est celui d'un call *down and out*. La figure 3 représente l'écart relatif entre les deux types d'évaluation pour plusieurs niveaux de la barrière et pour différentes valeurs du paramètres α .

Données initiales : $S = 100$, $\sigma = 25\%$, $r = 5\%$, Nombre de périodes initial : 100

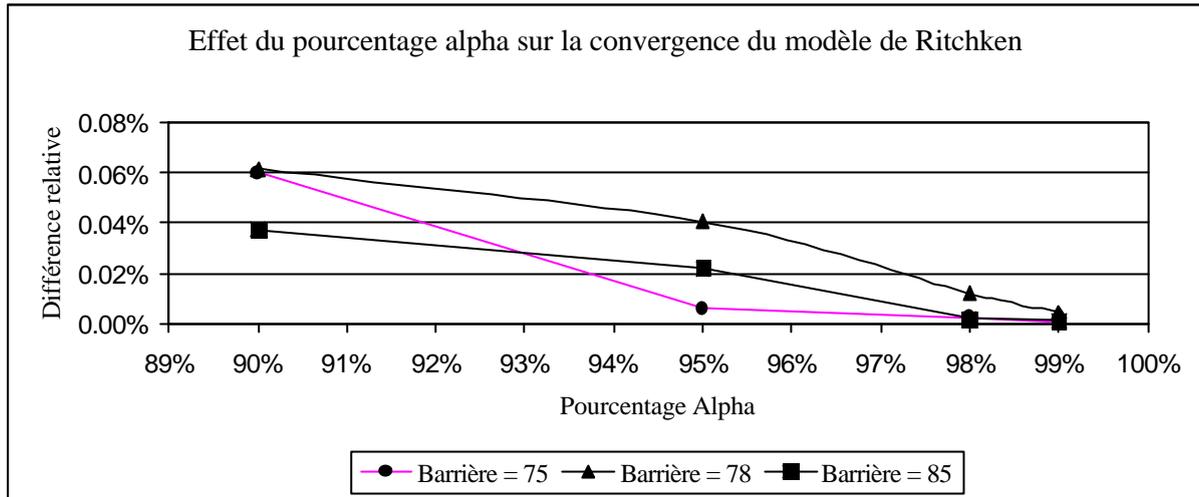


Figure 3

Les résultats montrent que les prix obtenus sont d'autant plus précis que le coefficient α est proche de 100 %. Cependant, la recherche d'une valeur élevée de ce coefficient peut conduire éventuellement à augmenter le nombre total de périodes.

C. Le modèle de Cheuk et Vorst

Pour une période donnée, plutôt que de modifier les points les plus proches de la barrière⁴, Cheuk et Vorst (CV – 1996) multiplient toutes les valeurs possibles du prix de l'action par un terme multiplicatif de telle sorte que l'un des niveaux du treillis des prix de l'action coïncide avec la valeur de la barrière en cette date. La figure ci dessous illustre le type d'arbre trinomial qu'ils obtiennent :

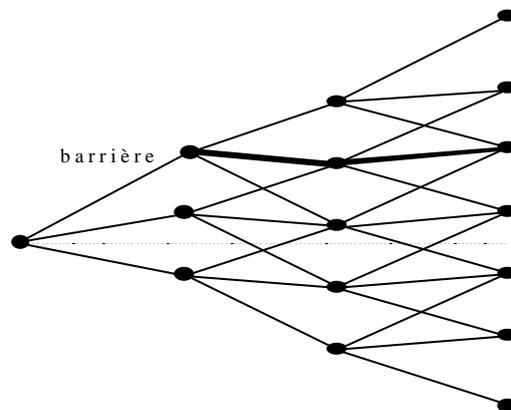


Figure 4

En fait, cette méthode ne permet pas toujours d'obtenir un système cohérent de probabilités. Cheuk et Vorst justifient cette situation en évoquant le lien établi par Hull et White (1993) entre l'arbre trinomial et la grille de résolution de l'équation aux dérivées partielles. Or la présence de probabilité négative dans un arbre trinomial incluant une barrière peut induire des aberrations sur les prix.

Afin d'illustrer ce type d'anomalie, on considère, sous l'hypothèse d'un taux d'intérêt nul⁵, l'évaluation d'un call *up and out* et celle de l'option vanille "équivalente" à l'aide d'un schéma trinomial à une période.

Probabilités	Call Vanille	Call up and out
$p_1 = -0.5$	100 F	0 F
$p_2 = 0.75$	90 F	90 F
$p_3 = 0.75$	80 F	80 F
Résultats :	Call = $-0.5 \times 100 + 0.75 \times 90 + 0.75 \times 80 = 77.5$	Call _{up out} = $-0.5 \times 0 + 0.75 \times 90 + 0.75 \times 80 = 127.5$

Cet exemple conduit au résultat abérant selon lequel le prix du call *up and out* est supérieur au prix du call vanille équivalent. La présence de probabilités négatives peut également engendrer des prix d'option négatifs. Des anomalies similaires peuvent être observées lorsque les barrières sont supposées activantes.

Par ailleurs, lorsque la valeur de la barrière est très proche du prix initial de l'actif risqué leur méthode ne permet pas de respecter la distribution mathématique du prix de l'option.

II. Evaluation partiellement séquentielle des options à barrière

Les principales difficultés rencontrées lors de l'évaluation des options à barrière résultent du détachement de dividendes de l'actif sous-jacent et de la proximité éventuelle de la barrière du cours initial de l'action. L'approche séquentielle peut être utilement utilisée pour résoudre ces difficultés. Connue depuis les travaux d'Evnine (1983), puis généralisée par Augros et Moreno (1998), cette approche consiste à décomposer chaque période de temps en plusieurs sous périodes. Elle est envisagée ici dans le contexte des options à barrière.

A. Construction de l'arbre d'évolution du sous-jacent

Le principe de la méthode consiste à décomposer partiellement chaque période, de durée Δt , en deux sous périodes, de durées respectives δ_1 et δ_2 , puis à ajuster la durée δ_1 de façon à caler le prix de l'actif à la fin de la première sous période sur le niveau de la barrière, et ce sans modifier la durée totale Δt de la période.

Les hypothèses H1 à H3 posées précédemment dans l'étude du modèle de Boyle sont reprises ici. En outre, trois nouvelles hypothèses, H4', H5' et H6', sont retenues :

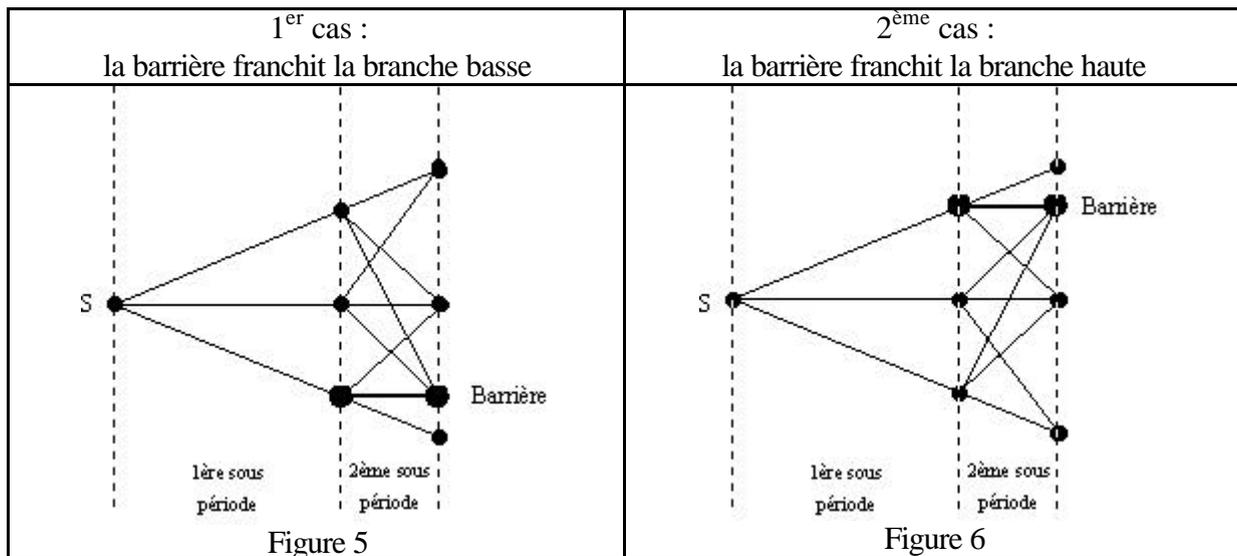
H4' : La durée de vie de l'option à évaluer est divisée en N périodes de longueur Δt identique. Selon le prix de l'actif risqué et du niveau de la barrière, chaque période peut être subdivisée en deux sous périodes, non forcément identiques, dont les durées respectives dépendent du niveau de la barrière. Les transactions ont lieu uniquement au début de chaque sous période ;

H5' : La barrière est supposée constante au cours de chaque période ;

H6' : L'arbre d'évolution du prix de l'actif est construit en deux étapes. Dans un premier temps, l'arbre des prix est identique à celui de Boyle. Dans un second temps, la barrière est intégrée dans l'arbre.

Si pour une période et un prix de l'actif donnés, la barrière ne franchit pas le treillis ou bien si le prix de l'actif au nœud père ou à l'un des nœuds terminaux est égal à celui de la barrière, le schéma trinomial n'est pas modifié.

Sinon, la période est décomposée en deux sous périodes. La durée de la première sous période est déterminée par le lieu de rencontre entre la barrière et la branche haute ou basse de l'arbre. La durée de la seconde sous période est égale à la différence entre la durée totale de la période et la durée de la première sous période. Les prix de l'actif à l'issue de la première sous période dépendent de la durée de cette sous période. On note $u_1(i)$ le coefficient de hausse et $d_1(i)$ le coefficient de baisse de la première sous période de la $i^{\text{ème}}$ période. Au cours de la seconde sous période, les mouvements du prix de l'actif peuvent avoir lieu selon trois directions : hausse, baisse et une troisième direction dépendant du nœud considéré et du niveau de la barrière. Le principe de construction de l'arbre au cours de la seconde sous période peut être schématisé dans les deux cas suivants :



Par la suite, le schéma séquentiel est introduit à l'intérieur de l'arbre trinomial comme le montre la figure suivante dans le cas d'une barrière du type *down and out* :

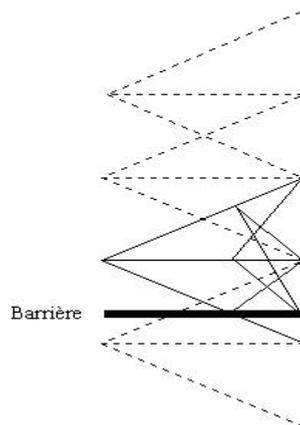


Figure 7

Il est par conséquent suffisant de restreindre la description de la méthode dans un cadre monopériodique.

B. Evaluation dans un cadre monopériodique

Les neuf coefficients multiplicatifs du prix de l'actif risqué intervenant au cours de la seconde sous période sont repérés selon un triplet. Le premier terme de ce triplet désigne la branche du schéma trinomial principal traversée par la barrière. La lettre b fait référence à la branche basse, tandis que la lettre u fait référence à la branche haute. Le second terme du triplet, toujours égal à 2, rappelle que le coefficient multiplicatif intervient au cours de la seconde sous période. Enfin, le dernier terme du triplet peut prendre les valeurs u , m ou d et désigne respectivement une évolution à la hausse, une évolution intermédiaire ou une évolution à la baisse du prix de l'actif.

a) Le cas d'une barrière de type down

Un calcul simple permet d'obtenir la durée δ_1 de la première sous période :

$$d_1 = \frac{B - S_0}{S_0(d - 1)} \Delta t$$

Les coefficients de hausse et de baisse au cours de la première sous période peuvent être déterminés sans avoir recours à des calculs géométriques. En effet, afin de faire coïncider l'un des niveaux de prix du treillis avec la barrière, il suffit de poser :

$$u_1 = \frac{1}{d_1} = \frac{S_0}{B}$$

Tout aussi facilement, les coefficients de hausse et de baisse au cours de la seconde sous période sont déduits à partir des coefficients u_1 et d_1 et en fonction des valeurs finales des prix de l'actif risqué du schéma trinomial principal :

$u_{b,2,u} = \frac{S_0 u}{S_0 u_1} = u d_1$	$m_{b,2,u} = \frac{S_0}{S_0 u_1} = d_1$	$d_{b,2,u} = \frac{B}{S_0 u_1} = d_1^2$
$u_{b,2,m} = \frac{S_0 u}{S_0} = u$	$m_{b,2,m} = \frac{S_0}{S_0} = 1$	$d_{b,2,m} = \frac{B}{S_0} = d_1$
$u_{b,2,d} = \frac{S_0}{S_0 d_1} = u_1$	$m_{b,2,d} = \frac{B}{B} = 1$	$d_{b,2,d} = \frac{S_0 d}{S_0 d_1} = d u_1$

b) Le cas d'une barrière de type up

En raison de la symétrie du problème, l'ensemble des paramètres est aisément déductible du cas précédent.

Ainsi, la durée δ_1 de la première sous période est égale à :

$$d_1 = \frac{B - S_0}{S_0(u - 1)} \Delta t$$

Remarquons que les coefficients de hausse et de baisse au cours de la première sous période sont identiques à ceux du premier cas :

$$u_1 = \frac{1}{d_1} = \frac{S_0}{B}$$

En revanche, les coefficients multiplicatifs au cours de la seconde sous période doivent être recalculés :

$u_{h,2,u} = u_{b,2,u}$	$m_{h,2,u} = 1$	$d_{h,2,u} = m_{b,2,u}$
$u_{h,2,m} = u_{b,2,u}$	$m_{h,2,m} = 1$	$d_{h,2,m} = d$
$u_{h,2,d} = u_1^2$	$m_{h,2,d} = u_{b,2,d}$	$d_{h,2,d} = d_{b,2,d}$

c) Système général de probabilités

A présent, il reste à résoudre le système général de probabilités régissant l'évolution de l'actif risqué dans l'univers risque neutre. Les coefficients de hausse, de baisse et de tendance moyenne sont respectivement notés h, b et m. θ désigne la durée de la sous période.

Le système de probabilités s'écrit :

$$\begin{cases} p_1 S h + p_2 S m + p_3 S b = SM \\ p_1 (S^2 h^2 - S^2 M^2) + p_2 (S^2 m^2 - S^2 M^2) + p_3 (S^2 b^2 - S^2 M^2) = S^2 V \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

où $M = \exp(rq)$ et $V = M^2 [\exp(S^2 q) - 1]$.

La résolution du système conduit à :

$$p_1 = \frac{M - m - p_3(b - m)}{h - m} \quad p_2 = 1 - p_1 - p_3 \quad p_3 = \frac{V + M^2 - m^2 - (M - m)(h + m)}{(b - m)(b - h)}$$

C. Extensions immédiates

Dans certains cas, plusieurs degrés de liberté supplémentaires peuvent s'avérer indispensables. Ceux ci peuvent être facilement obtenus lors de la construction du schéma séquentiel. Ainsi, plutôt que la durée de la première sous période soit déterminée par le point de rencontre entre la trajectoire linéaire du prix de l'actif et la barrière, il est possible de choisir les coefficients multiplicatifs au cours de la première sous période en fonction de la durée souhaitée. Le schéma ci-dessous illustre cette possibilité.

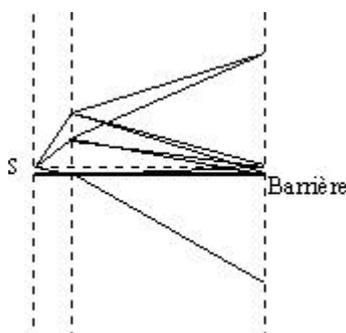


Figure 8

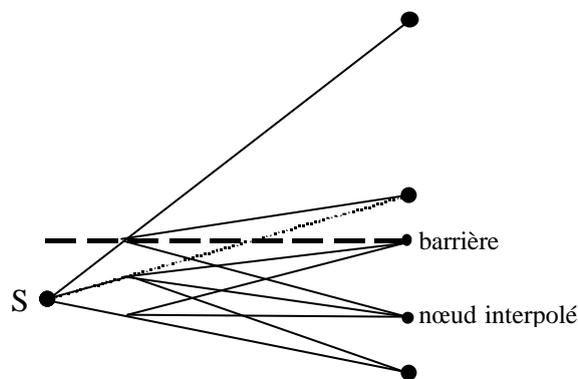
Dans le cas présent où la barrière est de type *down*, le schéma ci dessus montre que les coefficients intermédiaires de hausse et de tendance moyenne peuvent être calibrés autrement que dans le cas standard développé précédemment. Le coefficient de baisse est, quant à lui, déterminé par la durée souhaitée de la première sous période. Trois degrés de liberté sont donc aisément obtenus, ce qui donne la possibilité de contrôler au moins trois des douze

probabilités du schéma⁶. Afin d'obtenir un quatrième degré de liberté, la valeur du paramètre λ pourrait aussi être modifiée.

On note m le coefficient multiplicatif de tendance moyenne du prix de l'actif risqué au cours de la première sous période. Les coefficients de hausse et de baisse au cours de la seconde sous période sont obtenus directement :

$u_{b,2,u} = u / u_1$	$m_{b,2,u} = 1 / u_1$	$d_{b,2,u} = d_1 / u_1$
$u_{b,2,m} = u / m_1$	$m_{b,2,m} = 1 / m_1$	$d_{b,2,m} = d_1 / m_1$
$u_{b,2,d} = 1 / d_1$	$m_{b,2,d} = 1$	$d_{b,2,d} = d / d_1$

Enfin, à l'aide du principe de l'interpolation, le principe de la méthode séquentielle peut être étendu quel que soit l'arbre trinomial principal.



Cet exemple illustre l'indépendance de la méthode séquentielle avec l'arbre trinomial sous-jacent. Ce degré de liberté peut s'avérer utile dès lors que l'on souhaite intégrer la surface de volatilité (Cf Derman, Kani et Chriss 1996).

Les tests numériques ont montré que pour évaluer des options à barrière de type *down and out* les valeurs des paramètres suivants :

$$u_1 = u^{2/3} \quad m_1 = u^{1/3} \quad d_1 = \frac{B}{S_0}$$

assurent une convergence très satisfaisante⁷.

D. Le cas des options à multiple barrières

Options à double barrière désactivante

Il est supposé, dans un premier temps, que les deux barrières ne prennent pas place dans le même schéma trinomial. Dans ce cas, pour évaluer les options à double barrière, il suffit d'introduire deux schémas séquentiels à l'intérieur de l'arbre au cours de la même période. Exemple :

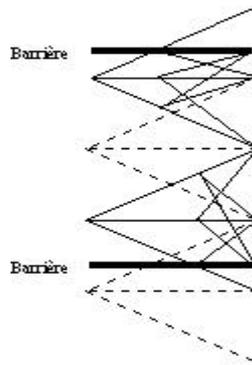


Figure 12

Les deux schémas ne sont généralement pas symétriques. Les subdivisions du temps ne sont pas les mêmes. C'est la raison pour laquelle il n'est pas possible d'introduire simultanément les deux barrières à l'intérieur du même schéma, excepté lorsque les barrières sont toutes les deux désactivantes. En effet, dans ce cas, en ajoutant une troisième sous période, l'évaluation devient possible comme le suggère la figure suivante :

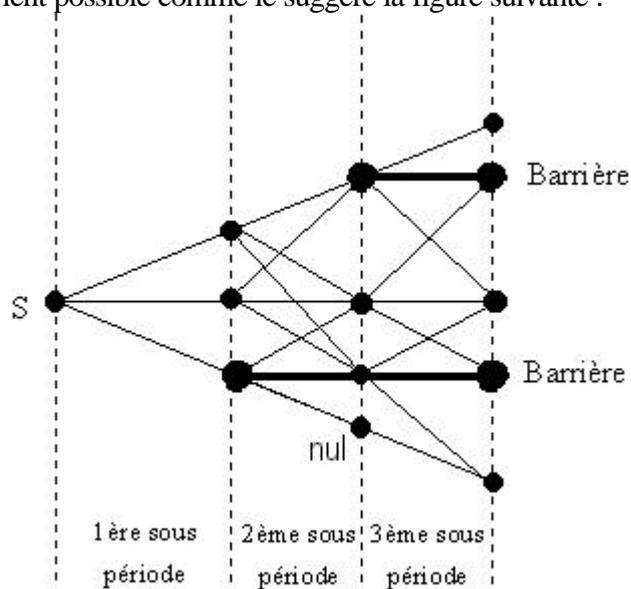
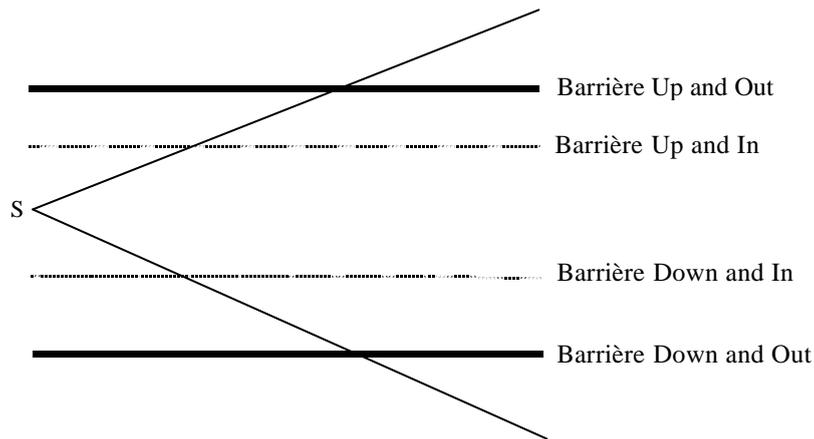


Figure 13

Comme précédemment, plusieurs degrés de liberté peuvent être utilement utilisés pour l'évaluation.

Généralisation en présence de plusieurs barrières

Nous envisageons ici le cas des options dont la valeur est conditionnée par plus de deux barrières. On peut supposer, par exemple, qu'une option ne s'active qu'après certaines variations du sous-jacent mais qui se désactive si ces variations sont trop importantes. La figure ci-dessous schématise ce type d'option :



Ce type d'option est très facilement évalué avec la méthode partiellement séquentielle puisqu'il suffit d'intégrer le nombre nécessaire de schémas partiellement séquentiels au cours de chaque période (1,2,3 ou 4 schémas selon le nombre de barrières traversées par le treillis des prix de l'actif).

E. Le cas des options américaines à barrière activante

En 1995, Reimer et Sandmann énoncent un algorithme permettant de résoudre le problème délicat de l'évaluation des options américaines à barrière activante. Cet algorithme écrit pour un arbre binomial est facilement étendu au cas des arbres trinomiaux de Ritchken et de CV ainsi qu'à celui des arbres partiellement séquentiel. Cette dernière approche doit cependant être légèrement adaptée. Pour une barrière de type désactivante, la valeur des nœuds touchant la barrière est nulle. Les valeurs finales pour ce type de nœud ne nécessitent aucun calcul. Au contraire, pour une barrière activante, il est nécessaire de connaître ces valeurs. Il suffit alors de prolonger le niveau de la barrière jusqu'à l'échéance et de calculer par induction arrière l'ensemble des prix d'option correspondant à ce niveau de prix de l'actif. Ainsi, mis à part le cas simple où la barrière est supposée constante, il peut être introduit dans le treillis de l'arbre un ensemble de niveau de prix qui prolonge une barrière partielle sans en avoir l'effet. Une autre méthode consisterait à calculer cette valeur finale à partir des trois nœuds fils du nœud père le plus proche.

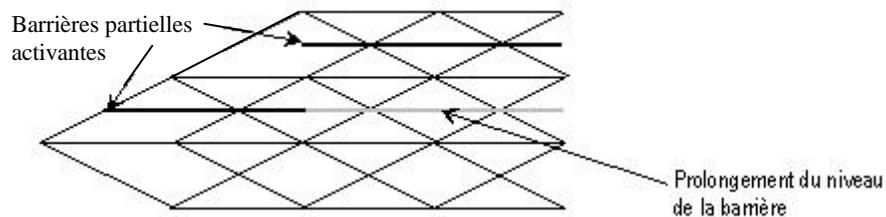


Figure 14

F. Simulations

La figure ci-dessous présente les écarts relatifs obtenus entre la formule fermée de Merton et la méthode séquentielle pour un call *down and out* et pour 100, 200, 500 et 1000 périodes de discrétisation

Données initiales : $S=K=100$, Barrière = 70 à 99,99 (calcul tous les 0,01) , $\tau = 1$ an, $r = 5\%$ et $\sigma = 20\%$

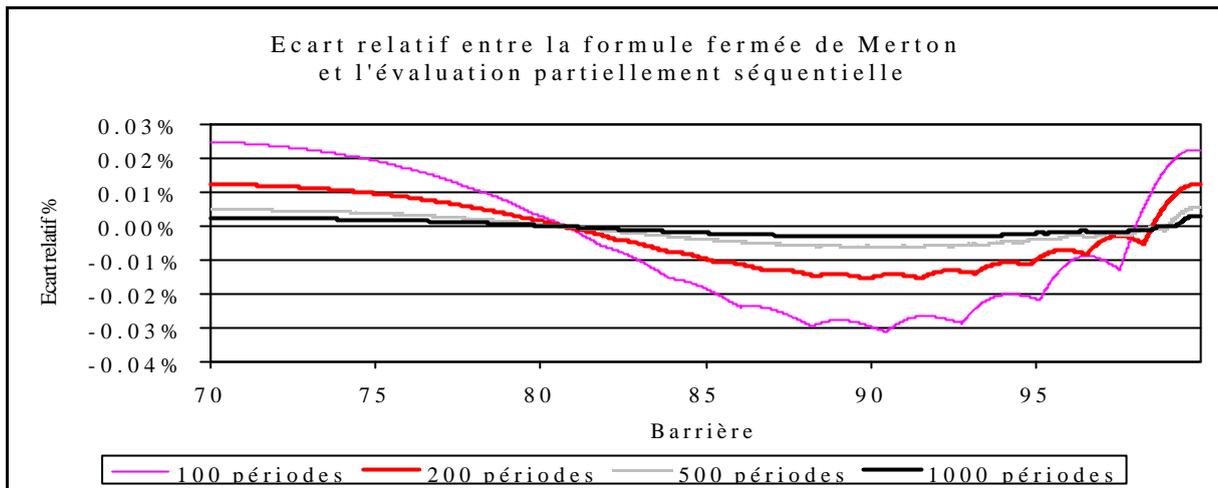


Figure 9

Pour un nombre donné de périodes, les courbes admettent des maximums (ou minimums) locaux pour des valeurs de la barrière très proches d'un niveau de l'arbre des prix de l'actif risqué. Ce phénomène est dû à la présence de probabilités négatives (cf. supra). L'évaluation reste cependant très efficace (écart relatif maximum pour 100 périodes inférieur à 0.04 %), et ce même pour une barrière très proche (99.99) du prix initial de l'actif (100). Sans le recours aux degrés de liberté supplémentaires, ce phénomène est largement amplifié et l'évaluation n'est pas toujours possible. Par ailleurs, il est évident que la sensibilité du modèle par rapport au paramètre λ est supérieure à celle observée pour le modèle de Boyle.

Données initiales : $S=K=100$, Barrière = 95, $\tau = 1$ an, $r = 5\%$ et $\sigma = 20\%$

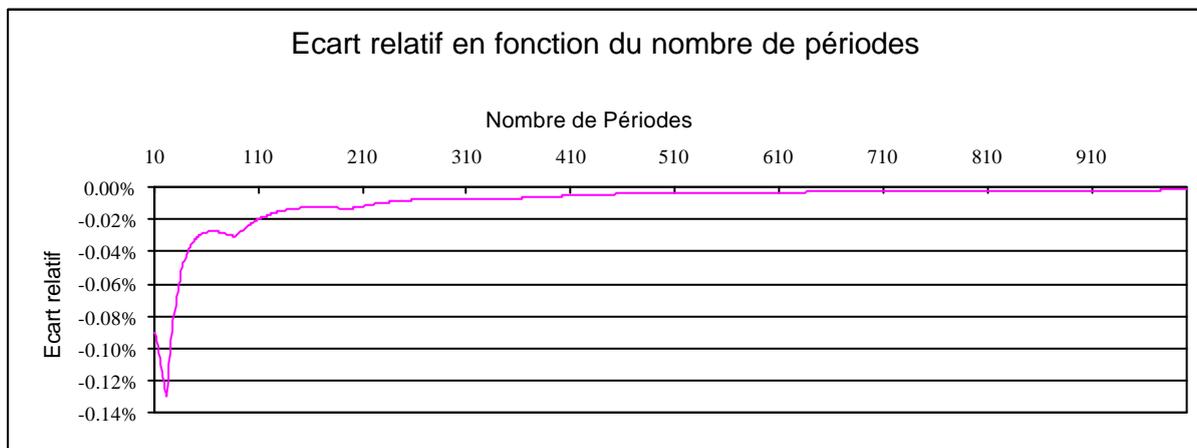


Figure 10

Numériquement, même pour un nombre de périodes très faible (10 par exemple), la méthode conduit à des résultats satisfaisants (inférieur à 0,13 % dans l'exemple). A l'instar du modèle de Ritchken, l'évaluation du prix de l'option est d'autant plus précise que le nombre de périodes concernées par le franchissement de la barrière est élevé.

Le tableau suivant compare l'ensemble des résultats obtenus et publiés par CV (mis entre parenthèses) à ceux obtenus avec notre approche. La valeur du paramètre λ est la même que celle choisie par CV.

Données initiales : $S = 100$, $K = 100$, $\tau = 0.5$ an, $r = 10\%$, $\sigma = 20\%$, $\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{2p}$

Nombre de Périodes	Barrières		
	95.0	99.5	99.9
10	5.7292 (5.7498)	0.7943 (1.0934)	0.1481 (0.5080)
50	5.7192 (5.7196)	0.8005 (0.8268)	0.1647 (0.2015)
100	5.7176 (5.7191)	0.8008 (0.8090)	0.1647 (0.1780)
500	5.7166 (5.7168)	0.8010 (0.8014)	0.1648 (0.1659)
1000	5.7164 (5.7168)	0.8011 (0.8011)	0.1648 (0.1652)
5000	5.7163 (5.7164)	0.8011 (0.8011)	0.1648 (0.1648)
10000	5.7163 (5.7163)	0.8011 (0.8011)	0.1648 (0.1648)
Formule Fermée	5.7163	0.8011	0.1648

L'approche partiellement séquentielle apparaît plus stable. En outre, la vitesse de convergence est supérieure à celle observée avec le modèle de CV. La différence s'accroît avec le rapprochement du niveau de la barrière à celui du prix initial de l'actif risqué.

Le tableau suivant présente les résultats obtenus dans le cas d'un *put up and out*.

Nombre de Périodes	Barrières		
	105	100.5	100.1
10	2.0525	0.2612	0.0532
50	2.0538	0.2616	0.0533
100	2.0538	0.2617	0.0533
1000	2.0539	0.2617	0.0533
5000	2.0539	0.2617	0.0533
Formule Fermée	2.0539	0.2617	0.0533

La stabilité et la vitesse de convergence de la méthode pour les puts de type *up and out* sont similaires à celles observées pour les calls *down and out*. Généralement, un très petit nombre de périodes (environ 10) est nécessaire pour obtenir une estimation inférieure à 1 %.

Par construction, l'évaluation par les modèles arborescents est plus sensible pour les options du type call *up and out* et put *down and out* (Cf Annexe). Le graphique suivant compare, pour des puts *down and out* et pour différentes valeurs de la barrière, les écarts relatifs entre les résultats fournis par la formule fermée et ceux donnés par le modèle de Ritchken et par l'approche partiellement séquentielle.

Données Initiales : S = 100, K = 100, r = 10%, $\sigma = 20\%$, $\tau = 1$ an, Nombre de périodes : 200

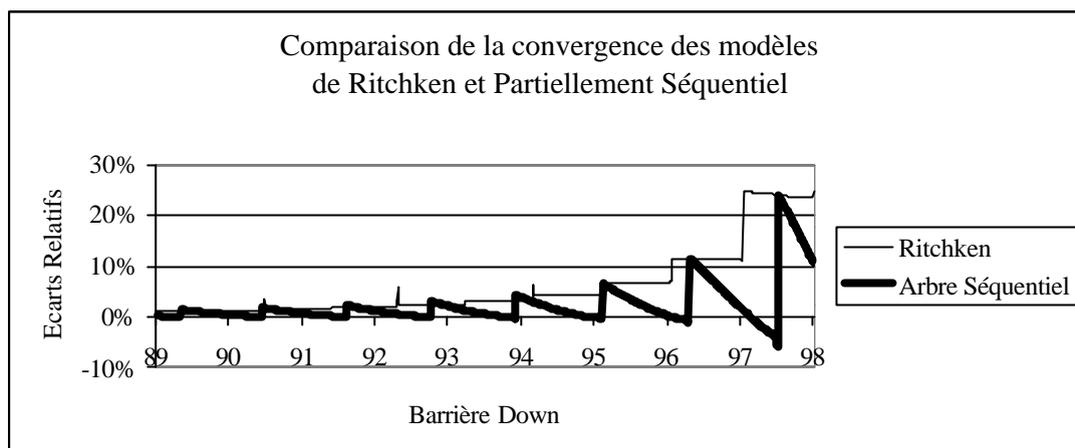


Figure 11

Dans ce cas, on vérifie encore que l'approche partiellement séquentielle engendre en général une meilleure approximation que celle obtenue par la méthode de Ritchken (environ 95% des prix calculés pour ce test).

L'illustration de la méthode est à présent poursuivie à l'aide des résultats publiés par CV (mis entre parenthèses) dans le cas d'un call *double knock out*.

Données initiales : S = 100, K = 100, $\tau = 0.5$ an, r = 10%, $\sigma = 20\%$, Barrière Down : 95

Nombre de Périodes	Barrière UP		
	110	125	150
10	0.0166 (0.0096)	1.8269 (1.8185)	5.4772 (5.3795)
50	0.0279 (0.0269)	2.0007 (1.9926)	5.3428 (5.3217)
100	0.0309 (0.0297)	2.0290 (2.0134)	5.3190 (5.3179)
500	0.0319 (0.0316)	2.0341 (2.0296)	5.3146 (5.3132)
1000	0.0320 (0.0319)	2.0321 (2.0314)	5.3130 (5.3121)
5000	0.0321 (0.0321)	2.0334 (2.0330)	5.3118 (5.3117)
10000	0.0321 (0.0321)	2.0332 (2.0331)	5.3117 (5.3116)

Les résultats sont plus difficilement comparables puisque cette fois la valeur du paramètre λ du modèle de CV dépend de la valeur des paramètres de l'option. Ce n'est pas le cas pour l'approche partiellement séquentielle pour laquelle la valeur du paramètre λ a été maintenue à $\frac{1}{2}\sqrt{2p}$. Toutefois, il est visible que les résultats sont proches et que pour des valeurs des barrières proches du prix initial de l'actif risqué, l'approche séquentielle converge plus rapidement.

CONCLUSION

Le découpage du temps en périodes puis en plusieurs sous périodes, mis en œuvre dans la méthode partiellement séquentielle, permet de respecter la distribution mathématique du prix de l'option. En conséquence, l'un des principaux avantages de cette méthode est dû au fait qu'une barrière peut couper le treillis des prix à n'importe quel niveau et à n'importe quel instant, notamment au cours de la première période ce que ne permet pas les approches de Ritchken et de CV. De plus, la méthode partiellement séquentielle présente l'avantage de permettre l'évaluation du prix des options à une ou plusieurs barrières sans nécessiter un quelconque ajustement du schéma trinomial sous-jacent ce qui peut s'avérer utile lors de l'éventuelle prise en compte de la surface de volatilité du rendement du prix de l'actif risqué.

ANNEXE

Dans le cadre des call *up & out* (resp. put *down & out*), le nombre de valeurs non nulles de l'option à l'échéance est fonction du prix d'exercice et de la barrière. Généralement, les options traitées sont à la monnaie et pour un niveau de barrière relativement peu éloigné du prix initial de l'actif risqué. En conséquence, l'évaluation du prix de l'option par induction arrière ne dépendra que d'un nombre très limité de valeurs finales non nulles.

Les arbres d'évolution suivants illustrent ce phénomène et dévoilent la cause de la différence de convergence des approches par arborescence pour l'évaluation d'un call down & out et pour celle d'un call up & out.

Données Initiales :

$S = K = 100$; volatilité : 20%; maturité : 1 an; $r : 5\%$; $N : 7$ périodes; $\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{2p}$.

Barrière Haute : 120; Barrière Basse : 80.

Arbre d'évolution du prix de l'actif risqué

							194.10
						176.55	176.55
					160.59	160.59	160.59
				146.08	146.08	146.08	146.08
			132.87	132.87	132.87	132.87	132.87
		120.86	120.86	120.86	120.86	120.86	120.86
	109.94	109.94	109.94	109.94	109.94	109.94	109.94
100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
	90.96	90.96	90.96	90.96	90.96	90.96	90.96
		82.74	82.74	82.74	82.74	82.74	82.74
			75.26	75.26	75.26	75.26	75.26
				68.46	68.46	68.46	68.46
					62.27	62.27	62.27
						56.64	56.64
							51.52

Arbre d'évolution du prix du call up & out

							0.00
						0.00	0.00
					0.00	0.00	0.00
				0.00	0.00	0.00	0.00
		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.69	0.86	1.11	1.50	2.25	3.50	9.94
0.93	1.09	1.30	1.57	1.96	2.40	3.41	0.00
	1.04	1.14	1.23	1.23	1.17	0.00	0.00
		0.66	0.56	0.40	0.00	0.00	0.00
			0.14	0.00	0.00	0.00	0.00
				0.00	0.00	0.00	0.00
					0.00	0.00	0.00
						0.00	0.00
							0.00

Arbre d'évolution du prix du call down & out

							94.10
						77.26	76.55
					62.01	61.31	60.59
				48.20	47.50	46.79	46.08
			35.76	34.99	34.29	33.58	32.87
		25.09	24.15	23.22	22.28	21.57	20.86
	16.61	15.59	14.52	13.36	12.16	10.65	9.94
10.41	9.47	8.47	7.39	6.22	4.85	3.41	0.00
	4.65	3.84	2.98	2.07	1.17	0.00	0.00
		1.32	0.85	0.40	0.00	0.00	0.00
			0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
				0.00	0.00	0.00	0.00
					0.00	0.00	0.00
						0.00	0.00
							0.00

Ces arbres de prix mettent bien en évidence le nombre important de valeurs nulles présent dans l'arbre de prix du call *up & out* ce qui affecte la vitesse de convergence de la méthode.

¹ L'évaluation est facilement étendue dans le cas d'une structure de volatilité déterministe.

² Dans leur article, Boyle et Hoon analysent les problèmes de convergence de l'approche binomiale. Ils montrent que seul un ajustement du nombre de périodes permet d'obtenir des résultats convenables, à moins de choisir un nombre de périodes extrêmement élevé.

³ $Ent|i$ désigne la partie entière i .

⁴ Ritchken propose en complément de sa méthode de ne modifier, sous certaines conditions, que le nœud du haut pour une barrière up ou que le nœud du bas pour une barrière *down* afin de faire coïncider le prix du sous-jacent avec la valeur de la barrière. Cette méthode permet d'évaluer les options à barrières non constantes.

⁵ Un taux d'intérêt positif aurait pu être considéré sans aucune difficulté.

⁶ Si l'on compte en tout 12 probabilités pour le schéma séquentiel, dans le cas des barrières désactivantes trois d'entre elles, correspondant à la séquence trinomiale du nœud touchant la barrière en fin de première sous période, sont inutiles.

⁷ Les durées des sous périodes n'ont pas fait l'objet d'ajustement spécifique. Un raisonnement symétrique a été appliqué pour les options de type *up and out*.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- AUGROS J. C.** et **MORENO M.**, "Evaluation séquentielle d'un actif contingent à plusieurs actifs risqués", Séminaire AFFI, 4 décembre 1998.
- BOYLE P.P.**, "A Lattice Framework for Option Pricing with two State Variables", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol 23, n° 1, March 1988, p 1 - 12.
- BOYLE P.** et **HOON LAU S.**, "Bumping Up Against the Barrier with the Binomial Method", *The Journal of Derivatives*, summer 1994.
- CHEUK T.** et **VORST T.**, "Complex Barrier Options", *The Journal of Derivatives*, fall 1996.
- CHEUK T.** et **VORST T.**, "Shout Floors", *Document téléchargé sur Internet : http://www.netexposure.co.uk/regd/issues/2/cheuk_vorst/index.html*, 2 novembre 1997.
- COX J.**, **ROSS S.** et **RUBINSTEIN M.**, "Option Pricing : A Simplified Approach", *Journal of Financial Economics*, Vol 7, 1979, p 229-264.
- DANA R.-A.** et **JEANBLANC-PICQUE M.**, "Marchés Financiers en Temps Continu – Valorisation et Equilibre", *Economica*, 1998, 2^{ème} édition.
- DERMAN E.**, **KANI I.** et **CHRIS N.**, "Implied Trinomial Trees of the Volatility Smile", *The Journal of Derivatives*, summer 1996, Vol 3, n° 4.
- EVNINE J.J.**, "Three Essays in the Use of Option Pricing Theory", Thèse, *Université de Californie, Berkeley*, 1983.
- FORSYTH P.**, **VETZAL K.** et **ZVAN R.**, "PDE Methods for Pricing Barrier Options", *Document téléchargé sur Internet*, Université de Waterloo, Centre for Advances Studies in Finance, Juillet 1997.
- GEMAN H.** et **YOR M.**, "Pricing and Hedging Double-Barrier Options : A Probabilistic Approach", *Mathematical Finance*, 1996, Vol 6, p 365-378.
- HEYNEN P.** et **KAT H.**, "Crossing Barrier", *Risk*, 1994, Juin, p 46-51.
- HEYNEN P.** et **KAT H.**, "Partial Barrier Options", *Journal of Financial Engineering*, 1994, Vol 3, p 253-274.
- HSU H.**, "Surprised Parties", *Risk*, october 1997, Vol 10, p27-29.
- HULL J.**, "Options, Futures and Other Derivatives", *Prentice Hall International Edition*, 3rd Edition.
- KUNIMOTO N.** et **IKEDA M.**, "Pricing Options with Curved Boundaries", *Mathematical Finance*, 1992, Vol 2, p275-298.
- MERTON R.**, "Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, Vol 4, p 141-183.
- PARZEN E.**, "Modern Probability Theory and Its Applications", *Wiley Publications In Statistics*, 9^{ème} édition, mars 1967.
- REIMER M.** et **SANDMANN K.**, "A discrete Time Approach for European and American Barrier Options", *Document téléchargé sur Internet*, Université de Bonn, département de statistique, Mars 1995.
- RICH D.**, "The Mathematical Foundations of Barrier Option-Pricing Theory", *Advances in Futures and Options Research*, 1994, Vol 7, p 267-311.
- RITCHKEN P.**, "On Pricing Barrier Options", *The Journal of Derivatives*, Winter 1995, p 19-28.
- REINER E.** et **RUBINSTEIN M.**, "Breaking Down the Barriers", *Risk*, September 1991, p 28-35.
- TIAN Y.**, "A Modified Lattice Approach to Option Pricing", *Journal of Futures Markets*, vol 13, n°5, août 1993, p 563-577.