

EVALUATION DES OBLIGATIONS INDEXEES SUR ACTION

Jean-Claude AUGROS
Professeur à l'ISFA
UCB Lyon I - Bât 101 - ISFA
43, Bd du 11 novembre 1918
69622 – Villeurbanne CEDEX
Tél : 04.72.43.11.75
Fax : 04.72.43.11.76
e-mail : augros@cismsun.univ-lyon1.fr

Michaël MORENO
Allocataire - Moniteur
UCB Lyon I - Bât 101 - ISFA
43, Bd du 11 novembre 1918
69622 - Villeurbanne CEDEX
Tél : 04.72.43.11.75
Fax : 04.72.43.11.76
e-mail : moreno@cismsun.univ-lyon1.fr

Le 15 novembre 1999

Résumé :

Dans cet article, trois méthodes d'évaluation des obligations indexées sur action (OIA) sont proposées puis comparées. Elles reposent sur la décomposition de ces titres en une valeur nue risquée et en un *call cappé* sur rendement qui est supposé, quant à lui, sans risque de défaut. Les méthodes présentées permettent, à tour de rôle, de prendre en compte la définition du *payoff* d'une OIA à partir d'une moyenne de cours et ce, grâce à la combinaison des approches par arbre ou par EDP et de la technique de simulation stochastique, puis l'évolution aléatoire des taux d'intérêt et, enfin, le caractère stochastique de la volatilité du rendement de l'actif sous-jacent.

Abstract :

Our contribution in this article is to show how share indexed bonds can be decomposed into two different financial contracts. The first one is a risky bond whereas the second one is similar to a call spread. Three different models are used to price these contracts. Mixing a binomial tree and Monte Carlo simulations we first reveal that the period during which the payoff is evaluated may not be neglected. Then the study compare results from Merton's model with stochastic interest rates with the one of Heston with stochastic volatility.

Mots clés : Arbre Binomial, *Call Cappé*, Obligation Indexée, Taux Stochastiques, Volatilité Stochastique.

keywords : Call spread, Indexed Bond, Binomial Tree, Stochastic Volatility, Stochastic Interest Rates.

Evaluation des obligations indexées sur action

Afin de réduire la charge d'intérêts de ses emprunts, une entreprise peut émettre des obligations assorties d'une ou plusieurs clauses optionnelles. La partie obligataire du titre garantit, en cas de non faillite, un seuil de rentabilité minimale pour le prêteur, tandis que la ou les clauses optionnelles permettent d'accroître la performance du produit en cas d'évolution favorable d'une variable financière de référence.

Ces produits dérivés hybrides prennent des formes variées. Ils peuvent cependant se répartir en deux grandes familles. La première regroupe les émissions de titres dont la conversion (obligations convertibles) ou l'exercice (obligations assorties de bons de souscription) permet à l'investisseur d'obtenir un nouveau titre émis par l'émetteur. La seconde comprend les obligations dont la valeur finale dépend d'un index pouvant être représenté par la valeur des actions de l'émetteur, par celle d'un indice boursier, par l'inflation ou par toute autre variable macro ou micro économique.

Cet article est consacré spécifiquement aux obligations indexées sur action (OIA) qui connaissent actuellement un certain engouement auprès des émetteurs. Il s'agit d'obligation zéro-coupon dont la valeur de remboursement finale correspond à la valeur faciale du titre augmentée d'une prime qui est versée au souscripteur lorsque, durant la durée de vie de l'emprunt, le rendement de l'action de l'émetteur dépasse un certain seuil. Lorsque ce rendement est insuffisant, la prime est nulle mais l'investisseur est assuré de recevoir un remboursement minimal dès lors que l'entreprise émettrice n'est pas en situation de faillite. La prime versée ne peut toutefois dépasser un certain plafond fixé lors de l'émission. Le rendement de l'action servant de base à l'indexation est généralement calculé à partir de la moyenne des cours observés respectivement sur une période inférieure à un mois précédant l'émission et sur une période d'environ quinze jours située à la fin de la vie de l'emprunt. Un délai d'un mois est souvent prévu entre la date de calcul du prix de remboursement et la date effective de remboursement.

A l'instar des obligations convertibles, ces titres sont sensibles à la fois à la volatilité du cours de l'actif sous-jacent et à la déformation de la courbe des taux d'intérêt durant leur durée de vie. Dans le cas des obligations convertibles, deux procédés généraux d'évaluation sont proposés : celui basé sur la valeur de l'action et celui basé sur la valeur de la firme. La prise en compte de la valeur de la firme s'avère plus adaptée aux caractéristiques des convertibles. Dans le cas des obligations indexées, ce choix n'est plus aussi pertinent et la décomposition de ces titres en deux produits financiers indépendants est préférable.

En effet, les particularités du produit simplifient le problème d'évaluation puisqu'il est possible de le décomposer en deux titres indépendants, une obligation sans coupon exposée au risque de défaut de l'émetteur et un *call capé* dont l'exposition au risque de défaut peut être considéré comme négligeable.

L'article est ordonné de la façon suivante : la première section justifie le principe de décomposition d'une OIA. La deuxième propose d'évaluer cet actif selon trois procédés différents ; le premier modèle utilise à la fois le modèle discret de Cox, Ross et Rubinstein (CRR - 1979) et la méthode de simulation stochastique de Monte Carlo. Le deuxième modèle est basé sur les hypothèses du modèle de Merton (1974) en présence de taux d'intérêt stochastiques. Le troisième modèle suppose que la volatilité est définie par un processus stochastique. Enfin, dans une dernière section, des simulations sont réalisées afin de comparer les résultats obtenus à partir de ces trois modèles.

I. Principe de décomposition de l'OIA

Le prix de remboursement contractuel d'une OIA est égal au maximum des deux montants suivants :

- $Nominal \times 100\%$
- $Nominal \times \left[100\% + x\% \times \left(\frac{\mathbf{b}_{MF} S_{MF} - \mathbf{b}_{MI,1} S_{MI}}{\mathbf{b}_{MI,2} S_{MI}} \right) \right]$

Où :

S_{MI} désigne la moyenne des cours de l'action constatée sur une période de quelques jours située environ un mois avant l'émission.

et S_{MF} la moyenne des cours de l'action constatée sur une période de l'ordre de 15 jours située environ un mois avant la date T_R de remboursement. On désigne par T_1 et T_2 , (avec $T_1 < T_2 < T_R$) les dates définissant la période de calcul du prix moyen final de l'action.

x et \mathbf{b}^* sont des coefficients pondérateurs prédéterminés lors de l'émission du titre.

- Le remboursement maximum est cependant limité à $(100+y)\%$ de la valeur du nominal.

La fonction *payoff* d'une OIA s'écrit donc formellement :

$$Payoff = Nominal \times \mathbf{a} \times 100\% + Nominal \times MAX \left\{ MIN \left\{ y\%; x\% \times \frac{\mathbf{b}_{MF} S_{MF} - \mathbf{b}_{MI,1} S_{MI}}{\mathbf{b}_{MI,2} S_{MI}} \right\}; 0 \right\}$$

où \mathbf{a} désigne un coefficient multiplicateur, compris entre 0 et 1, dont la valeur dépend de la situation de l'émetteur au moment du remboursement de l'emprunt. Celui-ci est égal à 1 en l'absence de défaillance de l'émetteur à la date T_R . Il est en revanche strictement inférieur à 1 lorsque l'émetteur n'est pas en mesure de respecter ses engagements.

Afin d'alléger les écritures, on supposera par la suite que tous les coefficients $\mathbf{b}_{..}$ sont égaux à 1.

Comme le montre le tableau ci-dessous représentant les flux à l'échéance d'une OIA, la valeur de l'obligation, à une date t quelconque, peut être assimilée à la somme de deux éléments représentés par :

- une obligation zéro-coupon, d'échéance T_R , dont le prix de remboursement contractuel est égal à la valeur nominale de l'obligation ;
- et par un *call capé*, correspondant à la différence entre deux *calls* européens, affecté d'un coefficient pondérateur. Soit :

$$OIA = Nominal \times B(t, T_R) + x\% \frac{Nominal}{S_{MI}} [C_1 - C_2]$$

où $B(t, T_R)$ représente la valeur en t d'une obligation zéro-coupon risquée, d'échéance T_R , dont le prix de remboursement contractuel est égal à une unité monétaire,

et où $C_1 = C(S, T_R, S_{MI})$ et $C_2 = C(S, T_R, K_{SUP})$ désignent deux *calls* européens, écrits sur une action cotée S , d'échéance T_R et dont le *payoff* terminal est égal à la différence entre S_{MF} et un prix d'exercice égal respectivement¹ à S_{MI} et K_{SUP} avec $K_{SUP} = \left(1 + \frac{y}{x} \right) S_{MI}$.

Valeur en t	Valeur en T_R		
	I	II	III
	$S_{MF} < S_{MI}$	$S_{MI} < S_{MF} < K_{SUP}$	$K_{SUP} < S_{MF}$
$Nominal \times B(t, T_R)$	$nominal \times a$	$nominal$	$nominal$
$x\% \frac{nominal}{S_{MI}} (C_1 - C_2)$	0	$x\% \frac{nominal}{S_{MI}} (S_{MF} - S_{MI})$	$x\% \frac{nominal}{S_{MI}} (K_{SUP} - S_{MI})$
<i>OIA</i>	$nominal \times a$	$nominal \left[1 + x\% \frac{S_{MF} - S_{MI}}{S_{MI}} \right]$	$nominal (1 + y\%)$

L'existence d'un risque de défaillance de l'émetteur lors du remboursement de l'*OIA* fait que l'obligation zéro-coupon $B(t, T_R)$ est risquée. La défaillance de l'émetteur au moment du remboursement de l'*OIA* entraîne en principe une baisse du cours de ses actions ayant pour effet d'annuler la valeur des deux *calls* C_1 et C_2 (colonne I du tableau précédent). Le souscripteur ne reçoit alors aucune prime. *A contrario*, lorsque le rendement de l'action, durant la vie de l'emprunt, est au-delà du seuil minimum donnant droit à une majoration du paiement final (colonne II et III), on peut raisonnablement admettre que la situation financière de l'entreprise est suffisamment satisfaisante pour permettre le remboursement complet des obligations sans coupon et le paiement des primes dues aux souscripteurs. En conséquence, l'*OIA* peut être utilement décomposée en une obligation risquée (communément appelée la valeur nue) et un *call capé* non exposé au risque de défaut de l'émetteur:

La valeur nue peut être assez facilement évaluée en majorant son taux actuariel d'un *spread*, ou écart de taux par rapport à une obligation équivalente, de même maturité, mais sans risque. Aussi, la suite de l'exposé traitera plus spécifiquement de l'évaluation du second terme composant l'*OIA*.

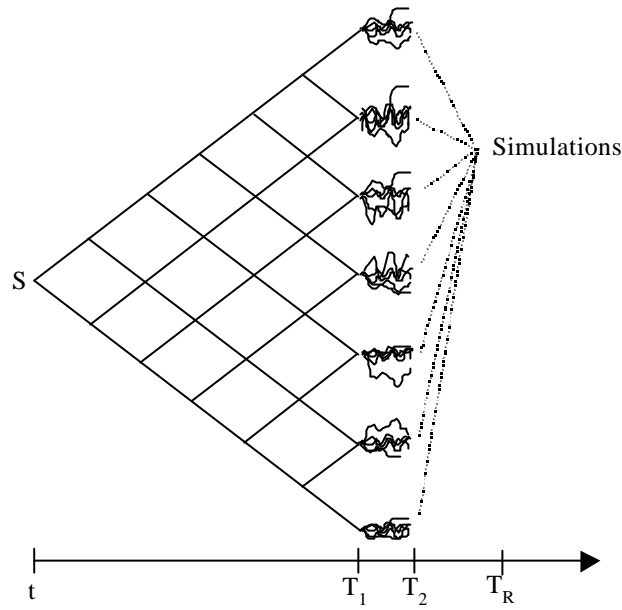
II. Les modèles d'évaluation

Afin de ne pas perturber la comparaison des différents modèles proposés, la présence de dividendes a été volontairement négligée. Chacune des différentes méthodes mises en oeuvre peut cependant être adaptée pour prendre en compte l'existence de versements de dividendes, les modalités de paiement des dividendes pouvant cependant varier d'un modèle à l'autre².

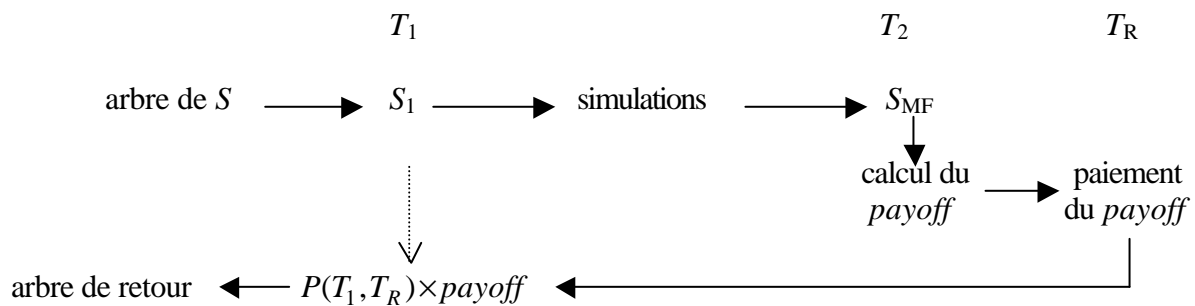
A. Modèle binomial combiné à des simulations stochastiques

Le premier modèle d'évaluation que nous proposons est un mélange de l'approche par arborescence de Cox, Ross et Rubinstein (CRR-1979) et de celle par simulation stochastique des trajectoires du prix de l'action selon le principe de Boyle (1977). Ce modèle permet de quantifier l'effet de la prise en compte d'une moyenne dans le prix de l'*OIA*. Les techniques par arborescence de CRR et de simulations de Boyle³ sont suffisamment connues pour ne pas être reprises en détail.

Par hypothèse, le cours de l'action suit un processus multiplicatif de type binomial et le taux d'intérêt r est supposé constant au cours du temps. Il convient alors de développer l'arbre des prix de S entre les dates t et T_1 , de simuler, pour chaque valeur finale de l'arbre en T_1 , les trajectoires de S entre T_1 et T_2 , puis d'en déduire, pour chaque trajectoire, la moyenne S_{MF} des cours journaliers constatés sur la période $[T_1, T_2]$. Pour chaque valeur finale de l'arbre des prix, la valeur moyenne des différentes valeurs S_{MF} obtenues est enfin calculée. On en déduit, pour chaque état de la nature correspondant aux branches terminales de l'arbre, le *payoff* calculé en T_2 et versé en T_R .

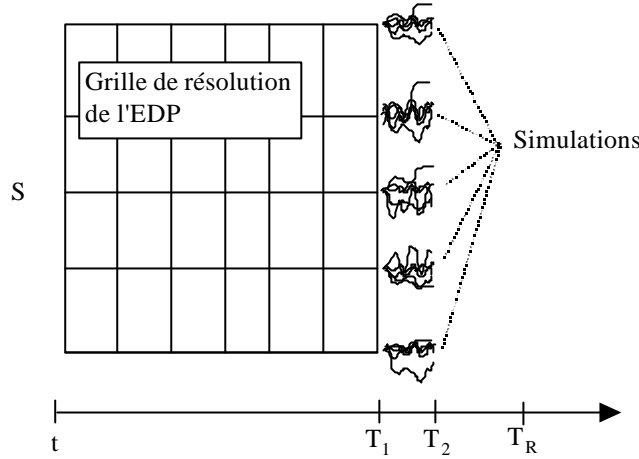


la construction de l'arbre de retour s'effectue en reportant à la date T_1 la valeur actualisée du *payoff* versé en T_R , soit le montant $[payoff \times P(T_1, T_R)]$, où $P(T_1, T_R)$ désigne le prix en T_1 d'une obligation sans coupon et sans risque de défaut, rapportant une unité monétaire en T_R . En présence de taux d'intérêt constants, il vient : $P(T_1, T_R) = e^{-r(T_R - T_1)}$



Il est possible d'utiliser à la place du schéma binomial classique de CRR d'autres méthodes par arborescence, plus générales, permettant notamment la prise en compte d'une surface de volatilité par prix d'exercice et par maturité⁴.

En outre, la méthode présentée peut être adaptée sans aucune difficulté aux méthodes numériques de résolution de l'EDP fondamentale d'évaluation. Dans ce cas, la grille du schéma est construite de façon classique, puis les conditions de bord à la date T_1 sont calculées, comme précédemment, à l'aide de simulations de Monte Carlo :



B. Modèle à taux d'intérêt stochastiques

Si l'on admet que les dates T_1 , T_2 et T_R sont confondues, une formule fermée d'évaluation du *call cappé* peut être obtenue en utilisant le principe du modèle de Merton (1973). Dans cette hypothèse, la moyenne de cours S_{MF} est assimilée à la valeur ponctuelle de l'action à la date T_2 et le *payoff* est supposé versé sans délai à cette date.

Merton suppose que les dynamiques du prix de l'action et d'une obligation zéro-coupon sans risque de défaut sont représentées par deux mouvements browniens géométriques :

$$\frac{dS}{S} = \mathbf{m}dt + \mathbf{s}(t)dZ(t) \qquad \frac{dP(t, T_2)}{P(t, T_2)} = \mathbf{a}(t)dt - \mathbf{d}(t)dZ'(t)$$

avec $dZ(t).dZ'(t) = -k(t)dt$.

Où : S désigne la valeur de l'action sous-jacente, t la date présente, $P(t, T_2)$ le prix en t d'une obligation zéro-coupon sans risque de défaut d'échéance T_2 et de durée de vie $t = T_2 - t$, \mathbf{m} et $\mathbf{s}(t)$ la dérive et la volatilité instantanée du rendement de l'action, $\mathbf{a}(t)$ et $\mathbf{d}(t)$ la dérive et la volatilité instantanée du rendement de l'obligation zéro-coupon $P(t, T_2)$, $k(t)$ le coefficient de corrélation instantané entre les rendements non anticipés de S et de $P(t, T_2)$, $Z(t)$ et $Z'(t)$ deux processus de Wiener standards sous la probabilité réelle.

$\mathbf{s}(t)$, $\mathbf{d}(T-t)$, $k(t)$ sont des fonctions déterministes de t .

T_2 représentant ici l'échéance de l'OIA, la valeur du *call cappé* est obtenue après passage dans l'univers *forward*-neutre Q_{T_2} .

Il vient après calculs :

$$\text{Call cappé} = \text{Nominal} \times P(t, T_2) \left\{ y\% N(d'_1) + x\% [N(d'_1) - N(d'_3)] \right\} + \frac{S}{S_{MI}} x\% \left\{ N(d'_4) - N(d'_2) \right\}$$

avec :

$$d'_1 = \frac{\ln \frac{S}{K_{SUP} P(t, T_2)} - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{s}}^2 t}{\hat{\mathbf{s}} \sqrt{t}}$$

$$d'_2 = d'_1 + \hat{\mathbf{s}} \sqrt{t}$$

$$d'_3 = \frac{\ln \frac{S}{S_{MI} P(t, T_2)} - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{s}}^2 t}{\hat{\mathbf{s}} \sqrt{t}}$$

$$d'_4 = d'_3 + \hat{\mathbf{s}} \sqrt{t}$$

où \hat{S} est la volatilité moyenne du rendement du prix *forward* de l'action, dans l'univers *forward*-neutre Q_{T_2} , donnée par :

$$\hat{S}^2 = \frac{1}{t} \int_t^{T_2} (\mathbf{s}^2(u) + \mathbf{d}^2(u)(t-u)^2 - 2k(u)\mathbf{s}(u)\mathbf{d}(u)(t-u)) du .$$

Si, par exemple, on retient, pour une obligation zéro-coupon $P(t,u)$, une structure de volatilité linéaire par rapport à la maturité, telle que $\mathbf{d}(t) = \mathbf{d} \times (u-t)$, où \mathbf{d} est une constante, et si l'on admet, en outre, que \mathbf{s} et k sont aussi des constantes, on obtient alors :

$$\hat{S}^2 = \mathbf{s}^2 + \mathbf{d}^2 \frac{t^2}{3} - k\mathbf{s}dt$$

Si l'on suppose désormais que la date T_2 de calcul du *payoff* est distincte de sa date de paiement T_R , il est possible de donner une formule approchée d'évaluation du *call cappé* en assimilant le prix en T_2 de l'obligation zéro-coupon rapportant une unité monétaire en T_R à son prix *forward* en t pour la date de livraison T_2 . Cette hypothèse revient à négliger le caractère aléatoire des taux sur la période $[T_2, T_R]$. La durée de la période $[T_2, T_R]$ étant généralement très faible en comparaison de la durée de vie de l'OIA, cette hypothèse peut être facilement adoptée.

En désignant par $F(t, T_2, T_R)$ le prix *forward*, à la date t , pour une livraison en T_2 , de l'obligation zéro-coupon $P(t, T_R)$ vient :

$$F(t, T_2, T_R) = \frac{P(t, T_R)}{P(t, T_2)}$$

En substituant dans la formule précédente du *call cappé* la valeur du nominal de l'OIA par le produit $F(t, T_2, T_R) \times \text{nominal}$, la valeur du *call cappé* devient :

$$\text{Call cappé} = \text{Nominal} \times P(t, T_R) \left\{ y\% N(d'_1) + x\% [N(d'_1) - N(d'_3)] \right\} + \frac{S}{S_{MI}} x\% \left\{ N(d'_4) - N(d'_2) \right\}$$

où les variables d'_1 , d'_2 , d'_3 et d'_4 sont inchangées.

Si l'on suppose que les taux d'intérêt ne sont pas stochastiques la formule précédente d'évaluation d'un *call cappé* se transforme facilement en une formule d'évaluation à la Black et Scholes⁵.

C. Modèle à volatilité stochastique

L'observation de la volatilité historique et de la volatilité implicite des actions montre que celles-ci varient largement au cours du temps. L'hypothèse habituelle d'une volatilité du rendement constante peut donc apparaître trop restrictive. Plusieurs auteurs en sont donc venus à considérer que la volatilité suivait elle aussi un processus stochastique.

Hull et White (1987) devaient ainsi postuler que la volatilité suit un mouvement brownien géométrique. Toutefois, les études économétriques réalisées par Gesser (1999) ont montré que le processus de diffusion de la volatilité choisi par Hull et White ne permettait pas toujours de retrouver les nappes de volatilités constatées sur le marché.

Le choix d'un processus avec retour à la moyenne (*mean-reverting*), retenu par Heston (1993), semble s'avérer plus adéquat pour décrire l'instabilité de la volatilité d'une action. Ainsi, cet auteur associe au processus habituel suivi par le cours d'une action un processus racine-carré pour décrire l'évolution de la variance, V , du rendement du titre.

Soit :

$$dS = \mathbf{m}Sdt + \mathbf{s}SdW$$

$$dV = k[\mathbf{q} - V]dt + \mathbf{x}\sqrt{V}dZ$$

où W et Z sont deux processus de Wiener de corrélation instantanée $\mathbf{r}dt$.

La valeur d'un *call cappé* peut être facilement obtenue, à partir de cette configuration, à l'aide des résultats établis par Gesser et Poncet (1997) ou bien par la méthode de simulation des trajectoires de l'actif et de sa volatilité. La durée de vie élevée des OIA nous fait préférer cette dernière méthode pour sa flexibilité en terme d'intégration des dividendes, de taux d'intérêts éventuellement aléatoires et pour le calcul de la valeur de référence S_{MF} . Les valeurs de S et de V aux dates t_{i+1} , $i \in \{0, \dots, N-1\}$, sont alors simulées, dans l'univers risque neutre, à partir des formules suivantes :

$$S_{i+1} = S_i \exp \left[\left(r(t_i, t_{i+1}) - \frac{1}{2}V_i \right) (t_{i+1} - t_i) + \mathbf{e}_i \sqrt{V_i (t_{i+1} - t_i)} \right]$$

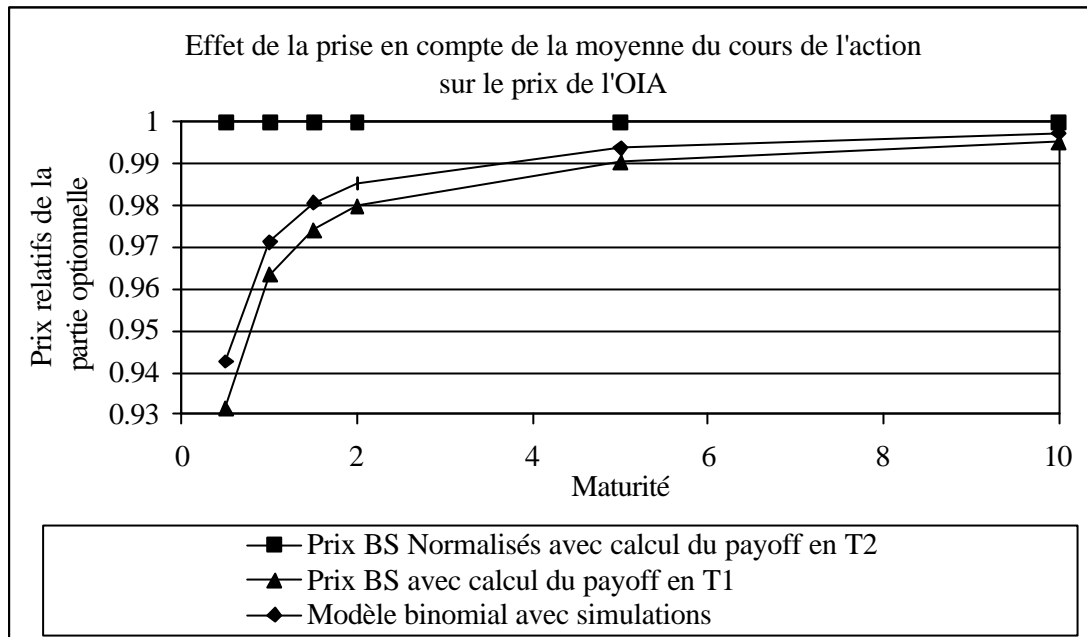
$$V_{i+1} = V_i + k[\mathbf{q} - V_i](t_{i+1} - t_i) + \mathbf{e}'_i \mathbf{x} \sqrt{V_i (t_{i+1} - t_i)}$$

où $\forall i \in \{0, \dots, N-1\}$, \mathbf{e}_i et \mathbf{e}'_i sont des variables aléatoires distribuées selon deux lois normales centrées réduites de corrélation⁶ \mathbf{r} , et $r(t_i, t_{i+1})$ le taux d'intérêt prévalant à la période $[t_i, t_{i+1}]$.

La simulation des trajectoires du cours de l'action sur la période $[t, T_2]$ à l'aide de ces deux processus permet de calculer la valeur du *call cappé* selon la technique habituelle. La vitesse de convergence des méthodes de simulation dépend essentiellement des techniques mises en œuvre dans l'élaboration des variables aléatoires. Afin de favoriser les temps de calculs les procédés quasi aléatoire du type *Low-Discrepancy* sont souvent programmés⁷.

III. Comparaisons et interprétations des résultats numériques

Nous avons tout d'abord mis en œuvre, pour différentes maturités, le modèle hybride, associant la méthode binomiale et celle des simulations, décrit à la section II-A. Afin de pouvoir comparer les résultats ainsi obtenus avec ceux fournis par la formule fermée faisant intervenir un calcul du *payoff* en T_2 , les valeurs obtenues ont été normalisés sur la base des résultats fournis par la formule analytique en présence d'un taux d'intérêt constant. Ainsi, tous les prix du *call cappé* obtenus avec la formule fermée et un calcul du *payoff* en T_2 sont ramenés à 1. Ils sont appelés prix BS avec *payoff* calculé en T_2 . Les résultats sont présentés sur la figure ci-dessous.



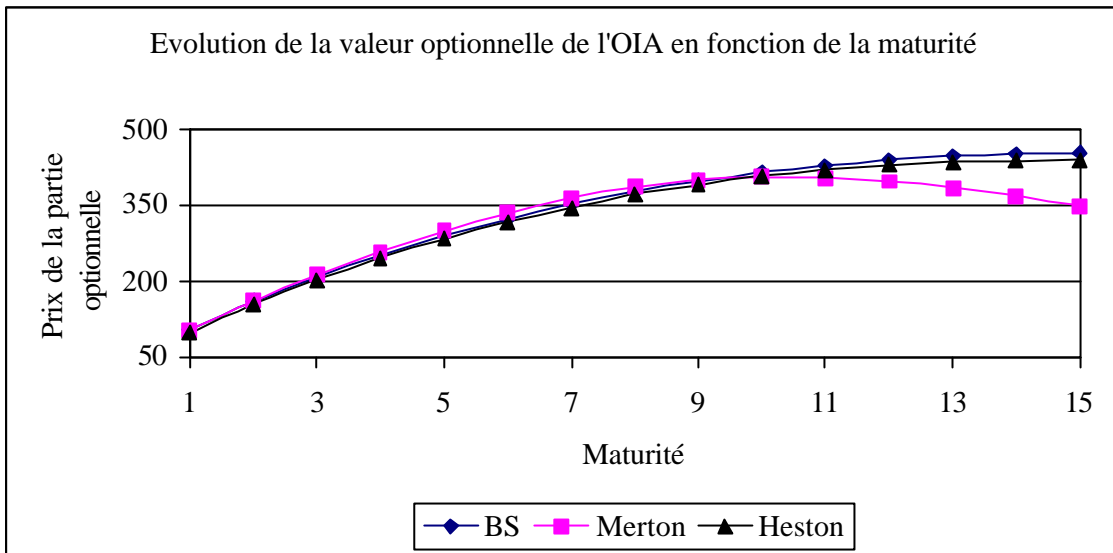
Données initiales : $S = 100$; $S_{MI} = 100$; $\sigma = 20\%$; $r = 5\%$; $x = 100\%$; $y = 300\%$;
Nombre de jours entre T_1 et $T_2 = 20$.

Dans l'exemple considéré, le graphique révèle que les prix calculés à l'aide de la méthode hybride sont sensiblement inférieurs aux prix BS obtenus avec un calcul du *payoff* en T_2 . L'obtention de prix plus faibles avec la méthode hybride est conforme à notre attente puisque le prix d'un *call* sur moyenne est nettement inférieur à celui du *call* vanille correspondant. L'écart entre les deux types d'évaluation, assez important pour de faibles maturités, tend à se réduire au fur et à mesure que la durée de vie de l'OIA augmente.

A des fins de comparaison, nous avons également représenté sur le graphique ci dessus la valeur du *call capé* obtenue avec la formule fermée lorsque le *payoff* est calculé en T_1 plutôt qu'en T_2 , le facteur d'actualisation $P(t, T_R)$ de la formule demeurant inchangé. Il ressort que cette valeur est plus proche de celle obtenue par la méthode hybride que de la valeur BS obtenue avec calcul du *payoff* en T_2 .

Dans d'autres conditions, les prix calculés avec la méthode hybride et avec la formule analytique avec calcul du *payoff* en T_1 peuvent être supérieurs au prix BS de référence obtenu avec un calcul du *payoff* en T_2 .

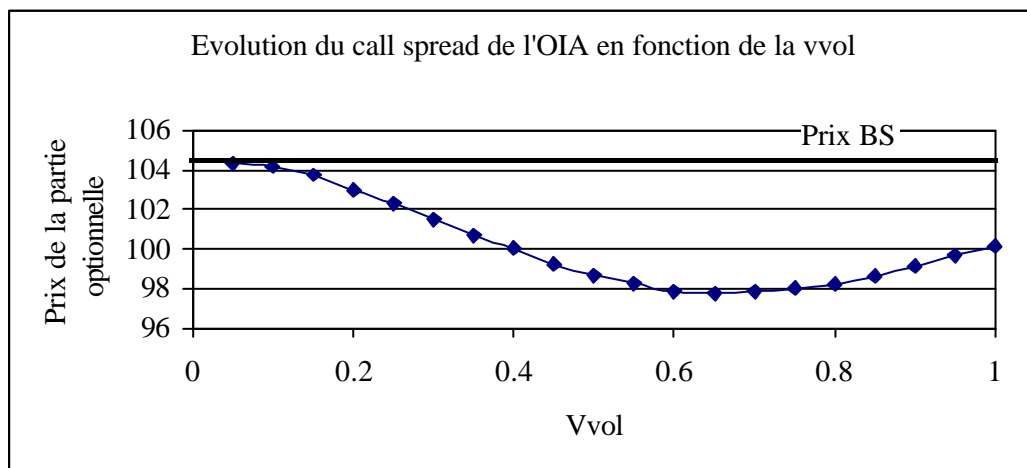
Dans un deuxième temps, nous avons cherché à comparer les résultats obtenus à partir des trois modèles suivants : le modèle de BS, celui de Merton et enfin celui de Heston. Pour ces trois type d'évaluation, le *payoff* est supposé calculé en T_2 et la valeur du nominal actualisée en T_2 est fixée à 1000.



Données initiales : $S = 100$; $S_{MI} = 100$; $s = 20\%$; $r = 5\%$; $x = 100\%$; $y = 300\%$;
 Nominal(T_2) = 1000 ; Nombre de jours entre T_1 et $T_2 = 0$; $vvol = 50\%$; Corrélation prix-volatilité = 0 ;
 Volatilité moyenne = 20 % ; Corrélation prix - zéro-coupon = 0 ; Volatilité zéro-coupon = 3%.

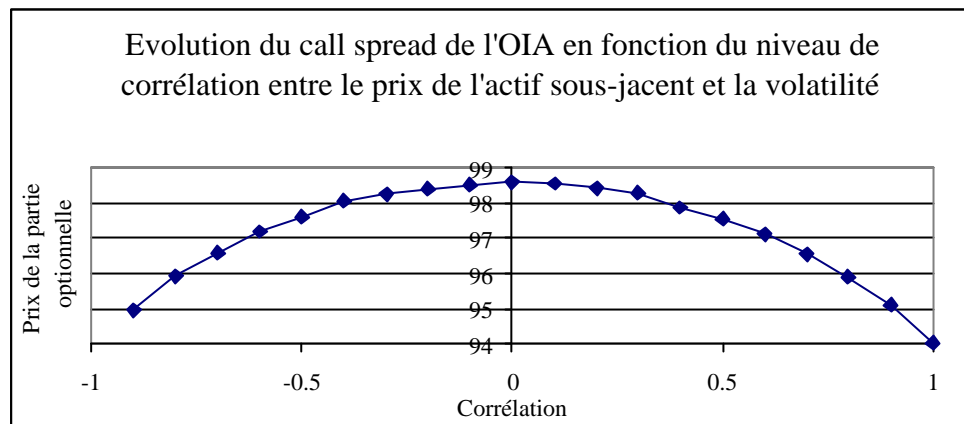
Pour les valeurs des paramètres retenues dans cet exemple, la courbe des valeurs obtenues à partir du modèle à volatilité stochastique de Heston est située en dessous de celle obtenue avec le modèle de BS. En revanche, la courbe des valeurs générées avec le modèle à taux d'intérêt stochastiques (Merton) croise les deux autres courbes. Ce phénomène est justifié par l'importance de la pseudo volatilité utilisée dans le modèle de Merton qui est supérieure, dans cet exemple, à celle introduite dans le modèle de BS. L'écart maximum entre la valeur BS et celle de Merton atteint 25% lorsque la maturité de l'OIA est égale à 15 ans.

En présence d'une volatilité stochastique, les valeurs obtenues varient sensiblement en fonction de la volatilité de la volatilité. Comme le révèle le graphique ci dessous, la courbe représentative de la valeur du call capé en fonction de ce paramètre est d'abord décroissante, puis croissante dans un second temps. En réalité, il s'agit de la même allure de courbe que celle observée dans le cas d'un call vanille.



Données initiales : $S = 100$; $S_{MI} = 100$; $s = 20\%$; $r = 5\%$; $x = 100\%$; $y = 300\%$;
 Nominal(T_2) = 1000 ; Nombre de jours entre T_1 et $T_2 = 0$; Corrélation prix-volatilité = 0 ; Volatilité
 moyenne = 20 %.

En faisant varier le coefficient de corrélation, on obtient le même type de courbe, en forme de U inversé, que celle qui représente l'évolution de la valeur d'un *call* vanille, fournie par le modèle de Heston, en fonction du coefficient de corrélation. L'allure de cette courbe est due au phénomène de retour à la moyenne qui caractérise le processus d'évolution de la variance du rendement et qui exerce une incidence assez complexe sur la valeur d'un contrat optionnel.



Données initiales : $S = 100$; $S_{MI} = 100$; $s = 20\%$; $r = 5\%$; $x = 100\%$; $y = 300\%$;
 Nominal(T_2) = 1000 ; Nombre de jours entre T_1 et $T_2 = 0$; $vvol = 50\%$; Volatilité moyenne = 20 %.

Conclusion

Le principe de décomposition des obligations indexées sur action, en une partie obligataire risqué et un *call cappé* sur rendement supposé sans risque de défaut, a été développé. Plusieurs méthodes d'évaluation du *call cappé* prenant en compte notamment soit la date de calcul de la valeur de référence finale du prix de l'action, soit l'hypothèse de taux d'intérêt stochastiques, soit une volatilité du rendement stochastique ont été mises en œuvre. Les résultats montrent l'importance non négligeable de la durée de la période de calcul du prix de référence final de l'action. Les prix du *call cappé* évalués à partir des modèles à taux ou à volatilité stochastique peuvent être nettement distincts des prix calculés sous les hypothèses du modèle de Black et Scholes. Nous retiendrons cependant que pour des maturités courtes, la réelle prise en compte de la valeur moyenne de référence S_{MF} et de l'hypothèse d'une volatilité stochastique semble plus pertinente que les autres méthodes. En revanche pour des maturités plus élevées, le modèle à taux d'intérêt stochastiques apparaît être plus adapté.

¹ La prise en compte des coefficients conduit à un prix d'exercice inférieur $K_{inf} = S_{MI} \frac{b_{MI,1}}{b_{MI,2}}$ à substituer dans

les formules à la place de S_{MI} et au prix d'exercice supérieur $K_{SUP} = \frac{b_{MI,2}}{b_{MF}} \left(\frac{y}{x} + \frac{b_{MI,1}}{b_{MI,2}} \right)$.

² Dans les modèles analytiques, les dividendes sont généralement supposés continûment versés. Dans cette hypothèse, la correction à apporter aux modèles d'évaluation est simple. On substitue à la valeur de l'action S la valeur $Se^{-\delta(T_2-t)}$, où δ est le taux de distribution du dividende supposé constant et proportionnel au cours du sous-jacent. A l'inverse dans les modèles numériques : par arbre, de résolution de l'EDP ou de simulations, les dividendes, de nature proportionnelle ou fixe, sont plutôt supposés être versés à des dates préalablement fixées. Cette dernière conjecture reflète mieux la réalité constatée sur le marché des actions. C'est l'une des raisons pour lesquelles le modèle à volatilité stochastique est présenté par la suite sous sa forme discrète.

³ La méthode des simulations de browniens initiée par Boyle en 1977, revient dans ce cas à simuler pour chaque valeur finale de l'arbre les trajectoires du prix de l'action entre les dates T_1 et T_2 . A l'aide du lemme d'Itô et après

intégration, on montre que pour deux dates t_1 et t_2 , $S(t_2) = S(t_1) \exp \left[\left(r - \frac{1}{2} \mathbf{s}^2 \right) (t_2 - t_1) + \mathbf{s} (\hat{Z}(t_2) - \hat{Z}(t_1)) \right]$. Il

ne reste plus qu'à simuler les valeurs de \hat{Z} selon une loi normale $N(0, \sqrt{(t_2 - t_1)})$ pour en déduire les trajectoires discrètes de S et la moyenne S_{MF} . Dans le but de calculer des prix moyens, la génération de variables aléatoires antithétiques par la technique du rejet polaire est l'une des plus efficaces.

⁴ Voir à ce sujet Derman et Kani (1998).

⁵ Sous l'hypothèse de taux d'intérêts constants, la formule fermée d'évaluation du *call cappé* est facilement obtenue. Afin d'alléger les écritures, on suppose d'une part l'absence de versement de dividendes (cash et continu) et d'autre part que tous les coefficients $b_{i,j}$ sont égaux à 1.

Il vient après calculs :

$$\frac{\text{Call cappé}}{\text{Nominal}(T_2)} = e^{-rt} \{y\% N(d_1) + x\% [N(d_1) - N(d_3)]\} + \frac{S}{S_{MI}} x\% \{N(d_4) - N(d_2)\}$$

avec,

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{K_{SUP}} + \left(r - \frac{1}{2} \mathbf{s}^2 \right) t}{\mathbf{s} \sqrt{t}} \quad d_2 = d_1 + \mathbf{s} \sqrt{t}$$

$$d_3 = \frac{\ln \frac{S}{S_{MI}} + \left(r - \frac{1}{2} \mathbf{s}^2 \right) t}{\mathbf{s} \sqrt{t}} \quad d_4 = d_3 + \mathbf{s} \sqrt{t}$$

où $K_{SUP} = \left(\frac{y\%}{x\%} + 1 \right) \times S_{MI}$, $\text{Nominal}(T_2)$ correspond à la valeur du nominal actualisée à la date T_2 et où $N(\cdot)$

désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Puisque l'OIA est un produit dérivé de type européen, le dividende versé par l'action sous-jacente peut être supposé continu.

⁶ A l'aide du principe de décomposition des browniens, il est possible de séparer l'un des browniens, par exemple Z , en deux browniens orthogonaux dont un parfaitement corrélé avec le brownien W .

⁷ L'une des méthodes de simulations les plus adaptées au cas envisagé est celle de Sobol, Cf Jung, 1998.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- AMIN K.I. et JARROW R.A., "Pricing options on risky assets in a stochastic interest rate economy", *Mathematical Finance*, Vol 2, n° 4, octobre 1992, p 217-237.
- AUGROS J. C. et MORENO M., "Evaluation séquentielle d'un actif contingent aux taux et à un actif risqué", *Banques et Marchés*, Novembre-Décembre 1999.
- AVELLANEDA M., LEVY A. et PARÁS A., "Pricing and Hedging Derivative Securities in Markets with Uncertain Volatilities", Working Paper, Courant Institute of Mathematical Science, 1995.
- BANSHALI V., *Pricing and Managing Exotic and Hybrid Options*, Ed IRWIN LIBRARY of Investment & Finance, 1998.
- BLACK F. et SCHOLES F., "The pricing of options and corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, Vol 81, n°3, 1973, p 637-659.
- BOYLE P.P., "Options : A Monte Carlo Approach", *Journal of Financial Economics*, N°4, 1977
- CLEWLOW et STRICKLAND, *Implementing Derivatives Models*, Ed Wiley, Financial Engineering, 1998.
- COX J., ROSS S. et RUBINSTEIN M., "Option Pricing : A Simplified Approach", *Journal of Financial Economics*, Vol 7, 1979, p 229-264.
- DELEY, "Computer Generated Random Numbers", Working Paper, 1991
- DERMAN et KANI, "Stochastic Implied Trees Arbitrage Pricing with Stochastic Term and strike Structure of Volatility", *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, Vol 1, N°1, 1998, p 61-110.
- DERMAN E., KANI I. et CHRISS N., "Implied Trinomial Trees of the Volatility Smile", *The Journal of Derivatives*, summer 1996, Vol 3, n° 4.

GALANTI S. et JUNG A., "Low-Discrepancy Sequences : Monte Carlo Simulation of Option Prices", *The Journal of Derivatives*, Automne 1997.

GESSER V., "Evaluation d'options de change européennes et exotiques avec volatilité stochastique", Université de Paris 1, 1999.

GESSER V. et PONCET P., "Volatility patterns : theory and some evidence from the Dollar-Mark option market", *Journal of Derivatives*, winter 1997, N°5, p 46-61.

HESTON, "A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options", *Review of Financial Studies*, N°6, 1993.

HESTON, "A simple New Formula for Options With Stochastic Volatility", Working Paper, sept 1997, John M. Olin School of business, Washington University in St. Louis.

MARSAGLIA et BRAY, "A Convenient Method for Generating Normal Variables", *SIAM Review*, 1964, N°4.

MERTON R.C., "Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, Printemps 1973.

RITCHKEN P. et TREVOR R., "Pricing Options Under Generalised GARCH and Stochastic Volatility Process", CMBF Papers, N° 19, Macquarie University, septembre 1997.

RUBINSTEIN, "Implied Binomial Trees", Working Paper Finance Reprint N°87 revised July 1994, *University of California at Berkeley*, reprinted from *The Journal of Finance*, Vol LXIX, N°3, July 1994.

SCHWARTZ E., "The valuation of warrants : implementing a new approach", *Journal of Financial Economics*, 1977, vol 4, pp 79-93.