

Modélisation de la température

Application aux dérivés climatiques

M. Moreno, O.Roustant.

I. Introduction

Malgré les avancées technologiques et l'amélioration des prévisions météorologiques, les risques liés au climat restent grands. L'urbanisation croissante, la pollution atmosphérique et le réchauffement actuel de la planète conduisent à de profondes modifications des systèmes de prévisions et surtout des valeurs climatiques mesurées sur la surface terrestre dans des endroits où l'intervention de l'homme est omniprésente (aéroport, centre ville, parcs urbains, etc.). Par ailleurs, les effets des courants marins El Niño et La Niña, bien que prévisibles, sont encore trop récents pour être pleinement quantifiés et modélisés. De plus, le débat scientifique entre un réchauffement durable ou ponctuel de la planète n'est toujours pas entériné par les météorologistes.

Le besoin de modéliser la température résulte de l'innovation financière de la fin des années 90 qui a conduit à la création du marché des dérivés climatiques. Un dérivé climatique est un contrat financier et non d'assurance¹ portant sur des valeurs climatiques telles que la température, la pluie, le vent, etc. Le souscripteur du contrat souhaite généralement se protéger contre un climat défavorable à son activité tel que le manque de neige dans une station d'hiver, un manque de vent ou d'eau nécessaire au fonctionnement des centrales d'énergie dites propres que sont les éoliennes et les barrages hydroélectriques ou encore un climat hivernal doux tendant à réduire le volume des ventes d'énergie destiné au chauffage des habitations... Mais à la différence d'un contrat d'assurance, la position peut être spéculative.

Le présent article ne s'inscrit pas dans une optique de prévision de la température à court terme. Notamment parce que les photos satellites sont indispensables à cette fin car elles permettent de mieux anticiper les mouvements des anticyclones et des dépressions atmosphériques et donc de prévoir avec une meilleure précision la température dans les prochains jours. Par ailleurs, la connaissance des prévisions est largement insuffisante, et l'on a besoin de pouvoir simuler des trajectoires "réalistes" de la température pour des horizons temporels de l'ordre de quelques mois. Le but de l'article est donc plutôt d'extraire toute l'information disponible de l'évolution passée de la température pour la modéliser et d'en déduire certaines statistiques.

Les premières études consacrées aux modèles de diffusion de la température ont été publiées par Bob Dischel (Dischel, 1998), Cao et Wei (Cao, Wei, 1998), et Carmona (Carmona, 1999). Deux modèles de température sont couramment envisagés. Le premier est le processus d'Orstein-Uhlenbeck, le second est un processus autorégressif d'ordre p AR(p). Ces deux processus ont été remis en cause par Moreno (Moreno, 2000b) qui a démontré que l'intégration d'une variance périodique nécessaire dans ces modèles ne suffisait toutefois pas à estimer les processus car la distribution des résidus bien qu'apparaissant globalement normale est en réalité dépendante des saisons.

¹ En fait il est possible de souscrire à un contrat d'assurance ayant exactement les mêmes caractéristiques qu'un dérivé climatique. Mais au contraire d'un contrat d'assurance, un dérivé climatique est un contrat financier qui peut être acheté à titre spéculatif et les contraintes du vendeur du contrat ne sont pas les mêmes que pour un groupe d'assurance. D'autres différences existent comme la prise en compte du contrat au sein du bilan de l'entreprise acquéreuse du contrat.

Deux critiques pourraient être formulés à ces modèles. La première est le découplage avec les autres phénomènes climatiques tels que la pluie et le vent. Moreno (Moreno, 2001) a mis en évidence et modélisé la persistance de la pluie. Or la pluie a généralement pour effet d'augmenter la température moyenne en hiver et de la réduire en été. Si l'effet sur la température de la persistance de la pluie est bien pris en compte par les modèles actuels, celui de l'asymétrie de l'effet ne l'est pas. Par ailleurs, les paramètres des modèles sont estimés à partir de données historiques très impures. Les défauts les plus prononcés sont trouvés pour les stations météorologiques des aéroports ou localisées en centre ville. En effet, dans les deux cas la température mesurée est fortement liée à l'activité et au trafic et donc au jour de la semaine. Ainsi la température moyenne du lundi est différente de celle du dimanche et plus généralement du jour de l'année².

Le présent article a pour but de présenter les modèles de température et d'en proposer une application à l'évaluation des dérivés climatiques. L'organisation de l'article en trois parties s'articule de la manière suivante. Les deux premières présentent deux modèles de température : le modèle de retour à la moyenne et le processus autorégressif à variance périodique. La troisième partie met en œuvre le second processus avec une application aux dérivés climatiques.

II. Principe de construction des processus de température – application au processus à retour vers la moyenne

L'extraction de la saisonnalité et de la tendance du processus de modélisation de la température ne suffit pas à représenter entièrement ce dernier. En effet, le processus suivi par la température est plus complexe que le processus linéaire suivant :

$$T_i = \Theta_i + m_i + \varepsilon_i \quad \text{EQ. 1}$$

où i indique l'instant t_i , T_i est la valeur de la température en t_i , Θ_i la composante saisonnière en t_i , m_i la valeur de la tendance en t_i et enfin ε_i un bruit i.i.d. (par exemple un bruit blanc).

Pour l'instant, deux modélisations de l'évolution de la température ont été envisagées : le processus de retour à la moyenne et les processus autorégressifs. Cette première modélisation est détaillée ci-dessous.

A. Le processus à retour vers la moyenne

Si l'on suppose que la saisonnalité et la tendance sont parfaitement connues, la modélisation de la température revient à modéliser l'écart entre la température réelle T_i et la composante déterministe $\Theta_i + m_i$. Afin de simplifier les schémas, on suppose que la tendance m_i est nulle.

² On constate par exemple, un réchauffement significatif des températures durant la quinzaine précédant les fêtes de fin d'année.

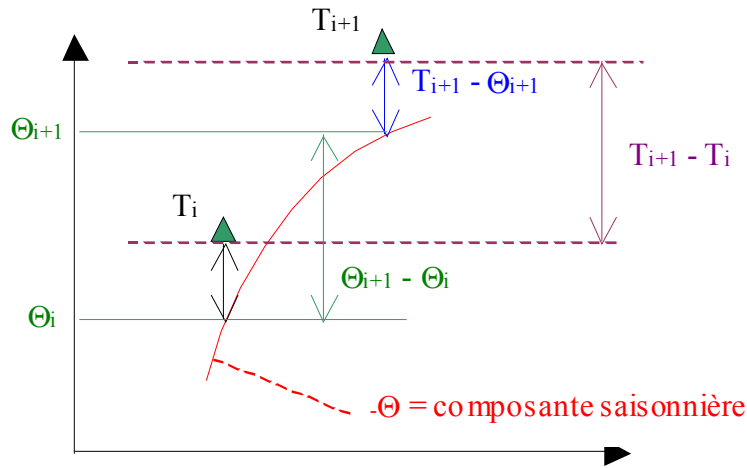


Figure 1

Supposons que nous connaissons à l'instant t_i la température T_i . Pour connaître la distribution de T_{i+1} il convient de savoir modéliser l'écart $T_{i+1} - T_i$. Or cet écart est fonction de la différence de la composante déterministe au cours de cette période : $\Theta_{i+1} - \Theta_i$. Une première étape dans l'écriture du processus de la température peut donc être :

$$T_{i+1} = T_i + (\Theta_{i+1} - \Theta_i) + \varepsilon_{i+1} \quad \text{EQ. 2}$$

où ε_{i+1} est une variable aléatoire dont la distribution reste à estimer.

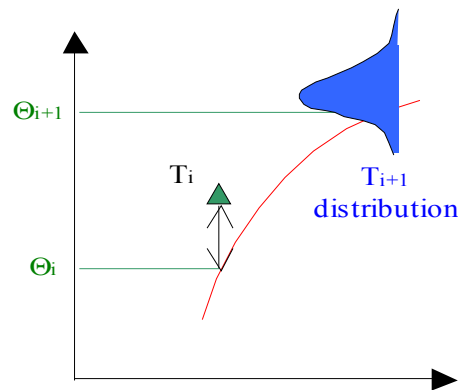


Figure 2

Supposons que le facteur aléatoire ε_{i+1} ne soit pas conditionnel au passé. Alors, avec une probabilité non nulle le processus peut diverger. De plus, la température ne peut pas dépasser certaines valeurs. Par exemple, il ne fera jamais plus froid que le zéro absolu : $-273,15^\circ\text{C}$. Dès lors le terme aléatoire ε_{i+1} est forcément dépendant du passé et borné. La température doit revenir vers sa valeur moyenne Θ_{i+1} .

L'une des façons d'obtenir un tel comportement est d'introduire une force de rappel dans le terme aléatoire du type :

$$\varepsilon_{i+1} = \alpha_{i+1} (\Theta_i - T_i) + \varpi_{i+1} \quad \text{EQ. 3}$$

où α_i est une fonction déterministe et ϖ_i un terme aléatoire.

Le processus de la température peut donc s'écrire sous la forme :

$$T_{i+1} = T_i \Theta + (T_i - m_i) \alpha + \varpi_{i+1} \quad \text{EQ. 4}$$

Si l'on suppose que la fonction α_i est constante et que les termes aléatoires ϖ_i sont indépendants gaussiens et à variance périodique, alors en temps continu, ce processus correspond au processus à retour vers la moyenne utilisé par Dischel (Dischel, 1998) :

$$dT_t = \Theta (T_t - m_t) \gamma dt + dW_t \quad \text{EQ. 5}$$

où W_t est un processus de Wiener, Θ intègre simultanément la composante saisonnière Θ_i et la tendance m_i et enfin γ_i une fonction déterministe. Selon Dornier et Quérue (Dornier, Quérue, 2000), il est possible sans aucune perte de généralité de supposer que la fonction γ_i est constante. Moreno (Moreno, 2000b) a prouvé que ce n'était en général pas le cas; la variance étant périodique.

B. Similitude avec le processus AR(p)

Plus récemment, Carmona (Carmona, 1999) propose d'intégrer un processus autorégressif d'ordre p AR(p) à la dynamique de la température. L'équation de diffusion devient :

$$T_{i+1} = \Theta_{i+1} + m_{i+1} + X_{i+1} \quad \text{EQ. 6}$$

où $X_i = \sum_{k=1}^p \beta_k X_{i-k} + \phi_i$, avec β_k des constantes et ϕ_i un bruit blanc gaussien³. Moreno

(Moreno, 2000b) a depuis démontré que le bruit n'était pas i.i.d. et qu'un bruit à distribution saisonnière et à variance périodique était plus adapté.

En fait, ces deux processus sont assez proches. En effet, l'équation peut se réécrire :

$$T_{i+1} - T_i = \Theta_{i+1} - \Theta_i + (T_i - m_i) \alpha + \varpi_{i+1}$$

$$\text{ou } T_{i+1} - m_{i+1} - \Theta_{i+1} = T_i - m_i - \Theta_i + \varpi_{i+1}$$

tandis que l'équation EQ. 6 peut s'écrire :

$$T_{i+1} - T_i - (\Theta_{i+1} - \Theta_i) - (m_{i+1} - m_i) = X_{i+1} - X_i$$

$$\text{ou } T_{i+1} - \Theta_{i+1} - m_{i+1} = X_{i+1}$$

Par conséquent si les deux dynamiques sont adaptées alors :

$$\alpha_{i+1} (\Theta_i - T_i) + \varpi_{i+1} = \sum_{k=1}^p \beta_k (X_{i+1-k} - X_{i-k}) + \phi_{i+1} - \phi_i$$

$$\text{ou } T_i - m_i - \Theta_i + \varpi_{i+1} = \sum_{k=1}^p \beta_k X_{i+1-k} + \phi_{i+1}$$

L'estimation des processus étant réalisée de façon indépendante, à l'instant t la connaissance de la distribution de l'un ou l'autre des aléas (ϖ_{i+1} ou ϕ_{i+1}) permet de déduire entièrement la distribution de l'autre aléa puisque :

$$E[\varpi_{i+1}] - E[\phi_{i+1}] = T_i - m_i - \Theta_i + \sum_{k=1}^p \beta_k X_{i+1-k} - \text{Constante}$$

Plus précisément, si X_i la série résiduelle : $X_i = T_i - m_i - \Theta_i$, alors de la formule (4) il vient la relation :

³ Bien que non précisé par Carmona, la distribution du bruit doit être tronquée afin d'éviter les valeurs aberrantes.

$$\begin{aligned} X_{i+1} - X_i &= \alpha_{i+1}(\Theta_i - T_i) + w_{i+1} \\ &= \alpha_{i+1}(m_i - X_i) + w_{i+1} \end{aligned}$$

D'où $X_{i+1} = m_i \alpha_{i+1} + (1 - \alpha_{i+1})X_i + w_{i+1}$

Dans le cas où m_i et α_i sont constants (cas de la stationnarité), on reconnaît l'expression d'un processus autorégressif d'ordre 1.

III. Modélisation selon le processus à variance périodique

Une autre approche, plus statistique et classique en séries chronologiques, a été suivie pour modéliser la température. Elle consiste à étudier de façon systématique les propriétés statistiques des données de température, puis de choisir parmi la gamme des modèles de séries chronologiques un modèle permettant de rendre compte de ces propriétés. Les études descriptives détaillées ci-dessous peuvent être trouvées dans (Carmona, 1999), (Dischel, 1999), (Moreno, 2000b) et (Roustant, 2000)⁴.

A. Propriétés statistiques.

Pour illustrer les propriétés essentielles de la température, nous utilisons les données journalières de température moyenne⁵ à Lyon⁶ depuis de 1^{er} janvier 1979 jusqu'au 31 décembre 1999.

1. Dispersion saisonnière. Dissymétrie.

Avant toute étude statistique, il est nécessaire d'éliminer la tendance et la composante de saisonnalité, par exemple au moyen de la décomposition additive classique :

$$T_t = m_t + s_t + Y_t$$

où m_t et s_t sont des processus déterministes correspondant respectivement au terme de tendance et à la composante de saisonnalité, et Y_t est un processus stationnaire centré.

Le problème en effectuant cette décomposition est que l'on s'aperçoit que le processus Y_t n'est pas stationnaire. En effet la dispersion des températures n'est pas constante au cours du temps. Or la désaisonnalisation fait disparaître la saisonnalité des valeurs de la température mais pas la saisonnalité de la dispersion. La figure 3 montre la représentation des distributions empiriques mensuelles de la série de température, sous forme de boxplots, une fois que l'on a enlevé la tendance et la composante de saisonnalité. On observe que la dispersion des températures est plus importante en hiver qu'en été. De plus on constate pour les mois d'hiver – janvier, février surtout – une *dissymétrie* de la distribution : la probabilité d'observer des températures exceptionnellement froides est plus élevée que celle d'observer des températures exceptionnellement douces.

⁴ Le modèle à variance périodique semble avoir été proposé la première fois par (Cao, Wei, 1998). Il est présenté ici sous une forme légèrement différente. La question de la validité du modèle est abordée de façon purement statistique ; on trouvera des compléments dans (Roustant, 2000).

⁵ La température journalière moyenne représente ici la moyenne de la température maximale et de la température minimale relevées dans la journée.

⁶ Plus précisément, il s'agit de la température relevée à la station météorologique de Lyon-Bron. Les données nous ont été fournies par Météo France.

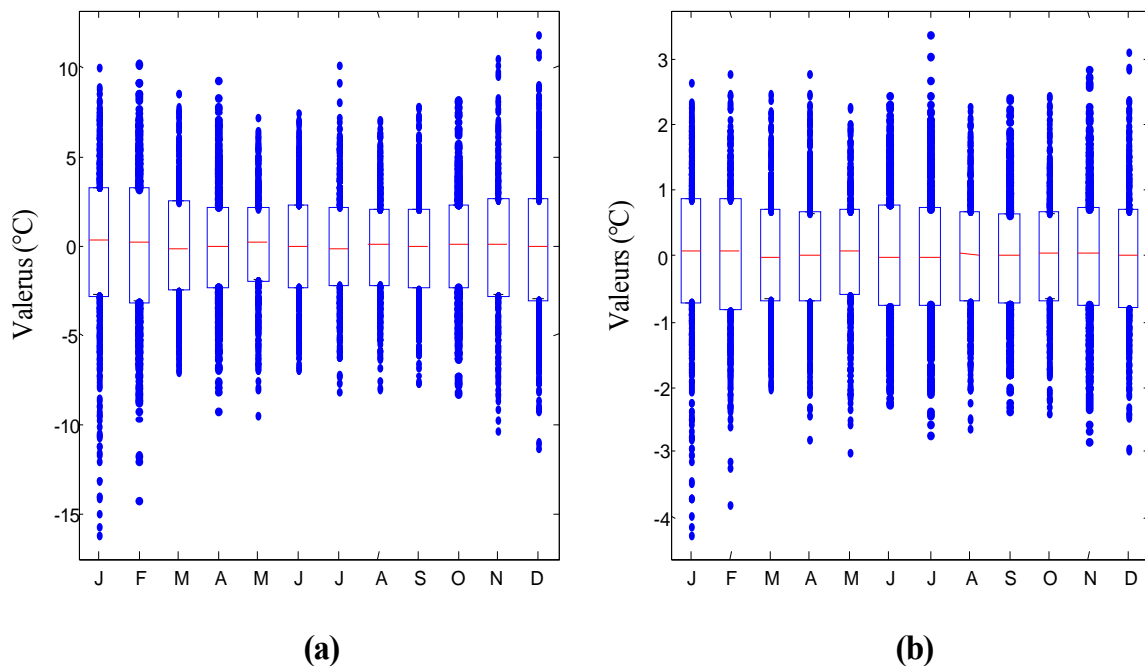


Figure 3. Boxplots des distributions mensuelles pour la série sans tendance et désaisonnalisée : sans correction (a) et avec correction de la dispersion de la saisonnalité (b).

Un modèle élémentaire pour la dispersion est donné par exemple par un processus déterministe de périodicité annuelle $\sigma_t = a \cdot \cos(\omega t) + b \cdot \sin(\omega t) + c$, avec $\omega = 2\pi / 365$ et la contrainte $\sigma_t > 0$. Une façon de prendre alors en compte la saisonnalité de la dispersion dans la décomposition additive est de transformer Y_t par le produit d'un processus stationnaire centré Z_t de variance 1, et de l'écart-type σ_t . La nouvelle décomposition s'écrit :

$$T_t = m_t + s_t + \sigma_t Z_t \quad (*)$$

L'effet de la transformation peut être visualisé sur la figure 3(b) où l'on a représenté les boxplots de la série correspondant à Z_t ⁷. Le "creux" particulièrement visible sur la figure 3(a) a disparu ; en revanche, la dissymétrie des distributions hivernales subsiste.

2. Dynamique des températures. Etude des autocorrélations.

L'étude de la dynamique des températures peut maintenant se faire sur la série résiduelle Z_t , qui sera désormais considérée "suffisamment" stationnaire.

Les autocorrélations et les autocorrélations partielles sont représentées sur la figure 4.

⁷ L'estimation (préliminaire) de σ_t est réalisée par lissage d'une moyenne mobile. Les paramètres a, b, c sont alors estimés par moindres carrés. Pour plus de détails, voir Roustant (2000).

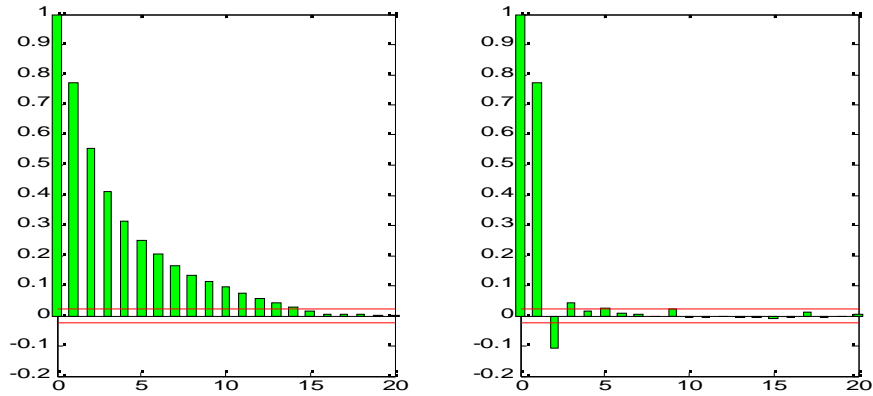


Figure 4. Autocorrélogramme (à gauche) et autocorrélogramme partiel de la série Z_t

Les autocorrélations s'aplatissent rapidement, et les autocorrélations partielles sont rapidement non significatives, pour un décalage supérieur à 3. Ces observations semblent indiquer que la dynamique de la série est de type autorégressive d'ordre $p = 3$. La sélection de l'ordre est confirmée par l'utilisation du critère SBC. A titre de comparaison, le modèle de retour à la moyenne s'apparente à un processus autorégressif d'ordre 1 seulement ; on a donc affaire à une dynamique plus complexe.

B. Le modèle à variance périodique.

1. Le modèle.

S'inspirant de l'étude précédente réalisée sur un cas particulier, on peut proposer pour la température le modèle un peu plus général suivant :

$$T_t = m_t + s_t + \sigma_t Z_t$$

avec $\sigma_t = a.\cos(\omega t) + b.\sin(\omega t) + c$ ($\sigma_t > 0$), $\omega = 2\pi / 365$ et Z_t un processus de variance 1 de type ARMA(p, q) :

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \psi_q \varepsilon_{t-q}$$

où (ε_t) est un bruit blanc. On fait en outre l'hypothèse classique de normalité de (ε_t) .

Dans le cas de la température à Lyon, on a montré que la sélection des paramètres p et q conduit au choix $p = 3$, $q = 0$.

La dernière hypothèse, faite à cause du rôle central joué par la loi normale en statistiques, peut toutefois sembler curieuse étant donnée la dissymétrie observée précédemment. D'une manière générale, nous donnons ci-dessous quelques éléments permettant d'apprécier la validité des hypothèses du modèle.

2. Validité du modèle

Les résultats concernant la validité peuvent dépendre des techniques d'identification utilisées ; cependant ils paraissent ici assez semblables quelle que soit la technique employée. Nous avons choisi de paramétrer m_t et s_t ce qui permet de réaliser l'identification d'un seul coup. Une forme affine a été retenue pour la tendance tandis que la saisonnalité, après une étude

spectrale, est modélisée sous la forme d'un polynôme trigonométrique faisant intervenir une périodicité annuelle et une périodicité de six mois :

$$s_t = a_1 \cdot \cos(\omega t) + b_1 \cdot \sin(\omega t) + a_2 \cdot \cos(2\omega t) + b_2 \cdot \sin(2\omega t).$$

L'estimation est réalisée ensuite par maximum de vraisemblance.

L'indépendance des résidus est étudiée au moyen des tests classiques de Ljung-Box et Kendall⁸. Les résultats sont montrés dans la table ci-dessous pour les villes de Lyon, Paris⁹ et à titre de comparaison : Chicago¹⁰.

Test	Largeur	Résidus			Carrés des résidus		
		<i>Lyon</i>	<i>Paris</i>	<i>Chicago</i>	<i>Lyon</i>	<i>Paris</i>	<i>Chicago</i>
Ljung-Box	15	0.005	0.001	0.004	0.205	0.051	0.000
	30	0.050	0.039	0.037	0.139	0.030	0.000
	45	0.090	0.165	0.040	0.163	0.141	0.000
	60	0.095	0.252	0.169	0.223	0.182	0.000
Kendall		0.170	0.321	0.632			

Table 1. Analyse de l'indépendance des résidus pour les séries de température de Lyon, Paris et Chicago.

On constate d'abord une différence nette entre le cas des villes françaises étudiées et la ville américaine de Chicago. Cela illustre le fait que le modèle a été construit à partir de séries de température d'une ville française. Bien entendu, le comportement de la température dépend de la localisation géographique. Il n'est donc pas étonnant que la qualité de l'ajustement dépende de la localisation géographique. S'agissant des villes de Lyon et de Paris, les p-valeurs du test de Ljung-Box correspondant à de faibles largeurs - inférieure à 30 – (c'est-à-dire associées à des statistiques calculées sur les 15 ou 30 premières autocorrélations) sont inacceptables au niveau 5%. Il y a donc un défaut d'indépendance, même si les autres p-valeurs sont satisfaisantes. Le modèle est rejeté de façon beaucoup plus nette pour des villes américaines comme Chicago.

La normalité des résidus est douteuse : par exemple, la statistique du test d'adéquation à la loi normale de Kolmogorov est juste égale à celle du seuil à 5% pour la ville de Lyon. Le tracé de la droite de Henri (figure 5) montre que les queues de distribution de la partie négative sont, dans ce cas, plus épaisses que pour une loi normale. Cette observation est en accord avec la dissymétrie des distributions hivernales observées précédemment.

⁸ Voir par exemple (Brockwell, Davis, 1991), paragraphe 9.4.

⁹ Station météorologique de Paris-Montsouris.

¹⁰ Station météorologique d' O'Hare Airport. Les données de température sur la période considérée sont en libre accès sur le site Internet du Chicago Mercantile Exchange : www.cme.com/weather

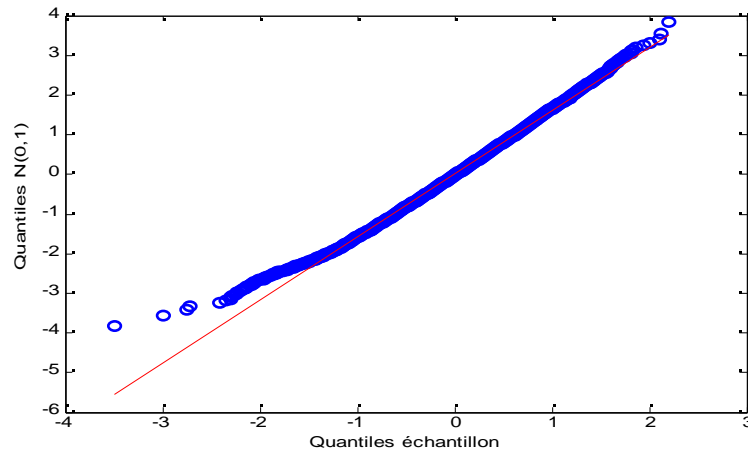


Figure 5. Droite de Henri des résidus pour la ville de Lyon.

IV. Utilisation pratique des modèles de température pour l'évaluation des dérivés climatiques

Contrairement aux produits optionnels usuels, un trader sur dérivés climatiques ne peut répliquer l'option puisque le sous-jacent, e.g. la température, n'est pas un actif échangeable comme les valeurs mobilières. L'utilisation alternative des *swaps*¹¹ pour se couvrir en position delta-neutre n'est pas non plus possible en raison d'un manque significatif de liquidité. Aussi, le prix P d'un dérivé climatique ne s'évalue pour l'instant que dans le cadre classique de l'assurance, à savoir :

$$P = e^{-rt} \{ E[\text{pay offs}] + P_R \}$$

Où r est le taux sans risque dont l'échéance est égale au terme du contrat, $E[\text{pay offs}]$ la prime pure et enfin P_R la prime de risque intégrant une prime de liquidité.

Ce prix est fonction de l'utilité du preneur de risque. Par la suite, cette hypothèse est abandonnée au profit de l'estimation de l'indice sous-jacent au contrat et du calcul de la prime pure indépendants de la sensibilité des acteurs économiques. Toutefois, la connaissance de la distribution des risques permet d'évaluer la prime de risque à l'aide des méthodes classiques des sciences de l'économie.

La distribution des *pay offs* et la prime pure peuvent être obtenues par plusieurs procédés dont les quatre principaux sont :

1. Burn Analysis
2. Technique dite actuarielle (filtrage + estimation de la distribution du risque)
3. Bootstrap sur les HDD par exemple (cette technique est basée sur un rééchantillonnage des valeurs empiriques)
4. Simulations de la température

Les trois premières méthodes d'estimation sont régulièrement remises en cause dans le cas des dérivés climatiques sur température en raison du réchauffement apparent des zones où les mesures sont relevées (urbanisation, accroissement du trafic aérien, pollution atmosphérique,...). Par exemple, les HDD hivernaux calculés sur Paris-Orly montre cette tendance de réchauffement c'est à dire de la diminution de l'indice HDD :

¹¹ Sur le marché des dérivés climatiques, un *swap* est équivalent à un contrat *forward* capé.

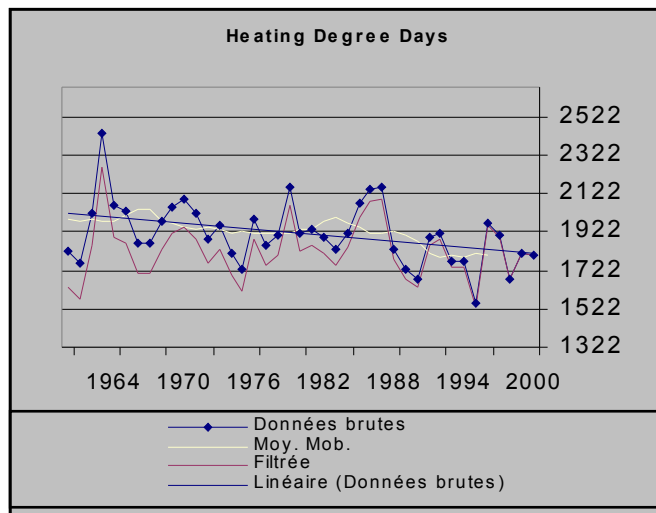


Figure 6

La représentation des données sur la figure 6 montre bien la nécessité de filtrer la tendance. Mais une analyse plus détaillée montre une différence très nette de l'évolution des indices au cours des dix dernières années au niveau mondial. D'ailleurs le marché prend en compte cette rupture de tendance en considérant très souvent comme référence principale la prime pure calculée sur les dix dernières années. Or les trois premières méthodes sont extrêmement sensibles au nombre des années pris en compte, surtout lorsque celui-ci est faible comme ici et au filtrage des données.

Après filtration des données, il est possible d'extraire la distribution du sous-jacent qui pour les contrats les plus traités sur le marché est proche de la loi normale comme le suggère la figure 7 :

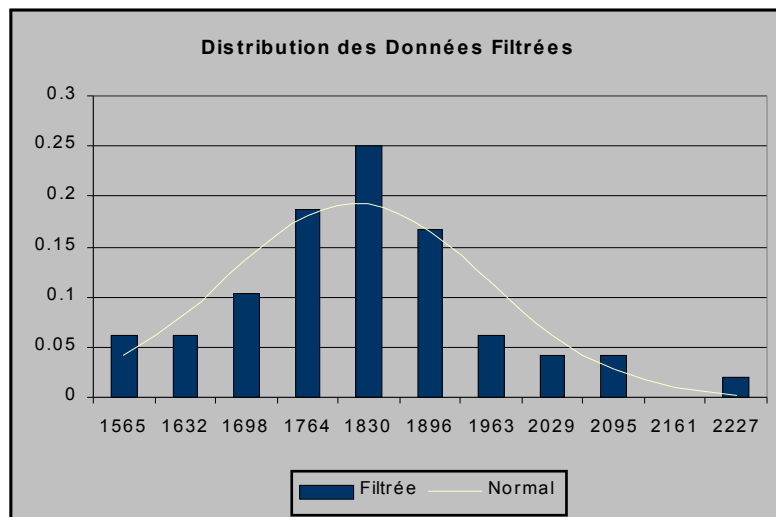


Figure 7

Lorsque la distribution de l'indice est extraite, il est possible d'en déduire la prime pure. Celle-ci se calcule par un simple calcul analytique ou par une méthode d'intégration si par exemple la distribution est calculée par la méthode du noyau. Moreno (Moreno, 2000a) propose un procédé générique d'évaluation des dérivés climatiques qui dans le cas d'un call sous l'hypothèse que les HDD sont normalement distribués donne pour prime pure la valeur suivante :

$$\text{Prix}_{HDD} \times \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{\alpha^2}{2}} - e^{-\frac{\beta^2}{2}} \right) + \text{Prix}_{HDD} \times \gamma \left[N(\beta; 0; 1) - N(\alpha; 0; 1) \right] + \text{Cap} \left[1 - N(\beta; 0; 1) \right]$$

$$\text{où } \alpha = \frac{HDD_{inf} - \mu}{\sigma}; \beta = \frac{HDD_{sup} - \mu}{\sigma}; \gamma = (\mu - HDD_{inf}); \mu \text{ et } \sigma \text{ étant les estimations}$$

de l'espérance et de l'écart-type de la distribution des HDD selon la loi normale ; HDD_{inf} et HDD_{sup} les prix d'exercice minimum et maximum du contrat ; Prix_{HDD} est le prix par HDD mesuré ; Cap est égal au *pay off* maximal de l'option et $N(X; 0; 1)$ la valeur de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite prise au point X.

Malheureusement, un autre problème majeur est soulevé par l'emploi de telles méthodes. Considérons un contrat sur indice HDD pour lequel les valeurs historiques sont toutes nulles. Selon les trois premières méthodes la prime pure du contrat est donc nulle. Pourtant ces valeurs ont pu être obtenues avec des données de température soit très proches ou égales à 18° C ou bien à partir de températures nettement supérieures de l'ordre de 30°C. Le risque encouru par le vendeur du contrat est très différent dans ces deux cas. Les valeurs des HDD, toutes nulles, ne fournissent pas une information totale sur le risque réel. Les principaux indices des dérivés climatiques : HDD, CDD, CTD et GDD sont des indices ne permettant pas de quantifier pleinement les risques car ils tronquent l'information. Plutôt que de filtrer les indices il est donc plus pertinent d'étudier le véritable indice sous-jacent au contrat : la température.

La simulation de la température, permet d'extraire avec une plus grande précision la distribution de l'indice notamment au niveau des queues là où l'assureur est le plus sensible au risque. La figure 8 ci-dessous présente les résultats obtenus à l'aide de la méthode du noyau (Kernel) et des simulations en comparaison à la loi normale :

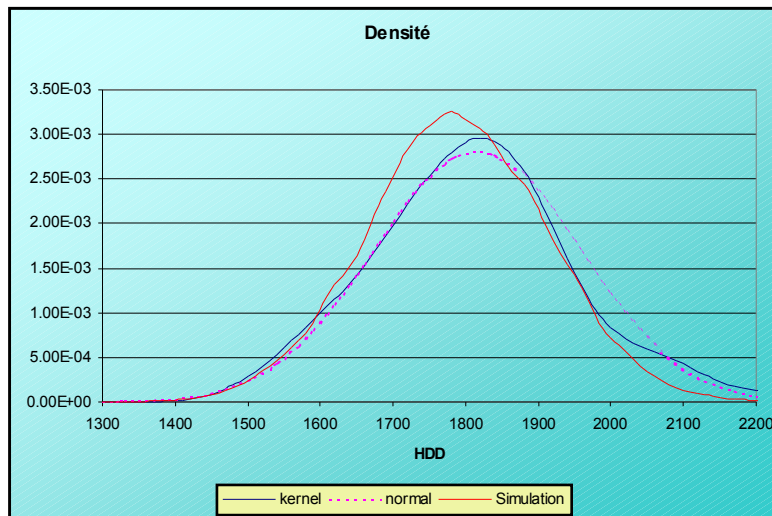


Figure 8

L'allure de la densité obtenue par la méthode des simulations est relativement proche de celle obtenue par extraction de la densité par la méthode des noyaux si ce n'est que la moyenne est sensiblement différente. Dans les deux situations, on retrouve une asymétrie de la distribution des HDD. La moyenne des HDD calculée à partir de la méthode dite actuarielle dépend étroitement de la filtration. Aussi, le nombre d'année pris en compte joue un rôle déterministe dans la filtration des données et donc dans cette valeur moyenne. Ainsi, l'hiver 1963 très connu sur le marché pour avoir été d'une extrême rigueur, due selon les experts météorologues à des activités volcaniques exceptionnelles, biaise de manière plus significative les distributions issues des trois premières méthodes. La méthode des simulations, moins

sensible au nombre d'année et à ces événements rares, permet d'estimer avec plus de précision le risque.

Dans la gestion au quotidien des risques climatiques, les avantages de la méthode des simulations par rapport aux autres méthodes sont très nombreux. En plus des avantages exposés ci-précédemment, après l'entame de la couverture de l'option l'évaluation intègre toute l'information automatiquement et le difficile calcul des probabilités conditionnelles est évité. Le *mark to market* ou *mark to model* indispensable à la gestion du portefeuille est facilité. Par ailleurs, l'estimation par la méthode des simulations d'un portefeuille d'options de type et de sous-jacent différents référencés sur la même ville intègre tous les liens de convexité et l'adéquation souvent délicate de distributions multivariées mêlant variables discrètes et continues est évitée. En outre, la méthode s'avère moins sensible à la plage de données prises en compte. Enfin, l'intégration éventuelle de prévisions météorologiques est aisée grâce aux paramètres déterministes m_{i+1} et Θ_{i+1} du processus.

V. Conclusion

Avant toute procédure d'évaluation ou de couverture d'un produit dérivé, il est naturel de modéliser le "sous-jacent"¹². Deux exemples de modélisation de la température ont été présentés ici, permettant d'apprécier ses caractéristiques très particulières. Que ce soit l'un ou l'autre des modèles, ils mettent en évidence une corrélation très forte entre la température d'un jour donné et la température du lendemain ce qui tranche radicalement avec le cas des rentabilités boursières. D'autre part, les temps de retour à la moyenne pour le processus d'Ornstein-Uhlenbeck adapté à la température sont très courts, contrairement à ce qui se passe pour le modèle de taux d'intérêt correspondant. Enfin, la modélisation de la température journalière moyenne a fait apparaître une double saisonnalité de même périodicité annuelle. La saisonnalité de la moyenne d'abord, qui peut évoquer l'effet du lundi des cours boursiers, mais qui est sans commune mesure ; la saisonnalité de la volatilité que l'on peut rapprocher des effets intra-day de la volatilité des rentabilités boursières (courbe en U, voir (Hamon, Jacquillat, 1992)), mais qui correspond à une toute autre échelle de temps.

La modélisation de la température et des autres aléas climatiques (voir (Moreno, 2001) pour le cas de la pluie) est un thème de recherche actuel. Une autre direction concerne l'évaluation des dérivés climatiques. En effet, bien que fournissant une compensation pour des pertes ou manques à gagner liés à un aléa climatique, les dérivés climatiques sont des produits financiers dans lesquels on peut avoir une position spéculative. La technique actuarielle utilisée actuellement (avec prise en compte de fonctions d'utilité) - qui serait justifiée pour des produits d'assurance - n'est donc peut-être pas la "meilleure" façon de procéder. D'autre part, une différence notable avec les dérivés "classiques" est le fait que le sous-jacent n'est pas échangeable : on ne peut pas monnayer la température, la pluie... Toutes ces particularités font de l'étude des dérivés climatiques un problème original pour lequel, à l'heure actuelle, beaucoup de questions restent encore ouvertes.

Bibliographie

- Brockwell P.J., Davis R.A. (1991). *Time Series : Theory and Methods*. Springer Verlag.
Cao M. et Wei J., (1998). *Pricing weather derivatives : an equilibrium approach*. Working paper.
Carmona R. (1999). *Calibrating degree day options*.

¹² Comme il est dit dans la suite, on ne peut pas échanger le "sous-jacent" dans le cas des dérivés climatiques.

- Dischel R. (1999). *At last : a model for weather risk*. Risk, Energy and Power Risk Management, March 1999.
- Dornier F., Quéruef M. (2000). *Caution to the wind*. Risk, Energy and Power Risk Management, August 2000.
- Hamon J, Jacquillat B. (1992). *Le marché français des actions. Etudes empiriques 1977-1991*. Presses Universitaires de France.
- Moreno M. (2000a). *Evaluation des dérivés climatiques*. Speedwell Weather Derivatives.
- Moreno M. (2000b). *Riding the temp*. FOW, December 2000.
- Moreno M. (2001). *Rain Risk*. Speedwell Weather Derivatives.
- Roustant O. (2000). *Une application de deux modèles de température à la gestion des risques climatiques*. Document de travail ISFA.