

EVALUATION DES OPTIONS NEGOCIABLES PAR L'INTERPOLATION DES ARBRES DE PRIX

Jean-Claude AUGROS
Professeur à l'ISFA
UCB Lyon I - Bât 101 - ISFA
43, Bd du 11 novembre 1918
69622 – Villeurbanne CEDEX
Tél : 04.72.43.11.75
Fax : 04.72.43.11.76
e-mail : augros@cismsun.univ-lyon1.fr

Michaël MORENO
Allocataire - Moniteur
UCB Lyon I - Bât 101 - ISFA
43, Bd du 11 novembre 1918
69622 - Villeurbanne CEDEX
Tél : 04.72.43.11.75
Fax : 04.72.43.11.76
e-mail : moreno@cismsun.univ-lyon1.fr

Le 8 février 1999

Résumé :

La valeur d'une option négociable est une fonction convexe du prix de l'actif risqué sous-jacent. Les méthodes par arbre de prix interpolés permettent de transcrire la convexité du prix des options en fonction de la valeur du prix de l'actif sous-jacent. Ces approches correspondent en fait à des méthodes traditionnelles. Sous certaines conditions, les options à barrière et les options *rainbow* peuvent aussi être évaluées selon ces approches.

Abstract :

One can show that the price of an option is a convex function of the underlying. Using this principle, we rely an interpolating approach to more classical method in the pricing of option. Then we extend the method to the problem of barrier and multi-asset options.

Mots clés :

Arbre, interpolation, option, option exotique.

keywords :

Tree, interpolation, option, exotic option.

Evaluation des options négociables par l'interpolation des arbres de prix

Une option bermuda d'achat (resp. vente) sur action - *call* (resp. *put*) - donne le droit à son détenteur d'acheter (resp. vendre) une action sous-jacente, à une date, parmi plusieurs possibles, et pour un prix d'exercice donné, fixés lors de la création du contrat. Lorsque ce droit ne peut être exercé qu'à l'échéance, l'option est qualifiée d'européenne. Lorsque le contrat peut être exercé à tout instant durant sa durée de vie, l'option est dite américaine. Bien que ces deux types d'option appartiennent à la classe des options bermuda (le terme mid-Atlantique est parfois utilisé), il est d'usage de réserver cette appellation aux options dont les possibilités d'exercice sont limitées à quelques dates, c'est à dire aux options qui ne sont ni européennes, ni américaines.

En l'absence de coût de transaction, l'exercice d'un call revient à recevoir un flux – ou *payoff* – égal à la différence entre le prix de l'action à l'instant considéré, S^* , et le prix d'exercice K . Pour une date d'exercice autorisée, le détenteur du droit, supposé rationnel¹, peut ne pas avoir intérêt à exercer son contrat. Ainsi, lorsque $S^* < K$, le contrat s'éteint ; il n'engendre aucun *payoff*. Lors de l'exercice du contrat, la fonction g_{call} des flux possibles, définie sur la demi-droite \mathbf{R}^+ , est égale à $(S^* - K)$. Sous les mêmes hypothèses, la fonction g_{put} des flux possibles d'un put est égale à $(K - S^*)$.

La formule d'évaluation de Black et Scholes (BS - 1973) concerne principalement les options européennes. Dès lors que les possibilités d'exercice de l'option sont étendues, cette formule ou ses extensions ne sont généralement plus applicables et le recours aux méthodes numériques discrètes devient nécessaire. Boyle (1973) a été le premier à recourir à une méthode de simulations de Monte Carlo pour évaluer une option européenne. Cette approche devait être étendue plus tard, par Barraquand et Martineau (1995), à l'évaluation des options intégrant une possibilité d'exercice anticipé. Par ailleurs, dès 1979, Cox, Ross et Rubinstein (CRR) ont développé une méthode par arborescence permettant d'évaluer de nombreux types d'option, et notamment celles pouvant être exercées par anticipation. Schwartz (1977) a été, pour sa part, l'initiateur des méthodes de résolution numérique de l'équation aux dérivées partielles (EDP) régissant la valeur d'un actif contingent. Ces méthodes sont appréciables pour leur capacité à intégrer des dividendes cash et à fournir les principaux paramètres nécessaires à la gestion de ces actifs. En 1993, Hull et White devaient, enfin, établir le lien entre les méthodes reposant sur un arbre trinomial et la méthode de résolution d'une l'E.D.P. à l'aide d'un schéma explicite.

Cet article a pour objectif de montrer que, sous certaines hypothèses, une option peut être facilement évaluée à l'aide d'une simple interpolation. Le principe de la méthode proposée repose à la fois sur le calcul de l'espérance de la valeur de l'option et sur la possibilité de représenter localement la fonction convexe du prix de l'option en fonction du prix du sous-jacent par une courbe (option sur une action), ou par une surface (option sur plusieurs actions).

L'article est organisé de la manière suivante : dans un premier temps, le lien entre le modèle binomial classique et l'interpolation linéaire est établi. Dans un second temps, le modèle trinomial est rattaché à une interpolation parabolique. Le principe de l'interpolation est ensuite étendu au cadre des options exotiques à barrière et à celui des options reposant sur plusieurs actifs risqués à rendements indépendants. Plusieurs résultats numériques sont enfin proposés pour illustrer la convergence de la méthode.

I. LE MODELE BINOMIAL

La méthode d'évaluation proposée repose sur l'hypothèse que la valeur d'une option est localement assimilable à une fonction linéaire de la valeur du sous-jacent. La particularité de la méthode est que le calcul des probabilités de transition n'est pas nécessaire. Par la suite l'approche par interpolation est reliée à l'une des approches binomiales classiques.

A. Les hypothèses du modèle

Soit à évaluer une option sur une action cotée S . Les hypothèses du modèle sont les suivantes :

- H1 : Le marché est supposé complet et sans friction ;
- H2 : L'intervalle de gestion $[0; \tau]$ est décomposé en N périodes de longueur identique égale à Δt . Les transactions ne peuvent avoir lieu instantanément qu'aux dates : $t_i = i\Delta t$; avec $i=0, \dots, n$;
- H3 : Le taux d'intérêt continu sans risque r , exprimé en base annuelle, est supposé constant ;
- H4 : En temps continu, le processus de diffusion de l'actif risqué est décrit par l'E.D.S. suivante :

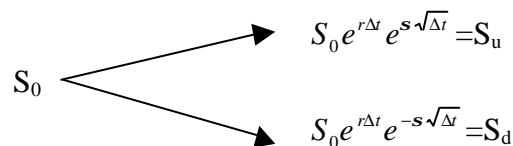
$$dS_t = S_t \mu dt + S_t \sigma dW_t$$

où :

- S_t désigne le prix de l'action à l'instant t ,
- μ , la dérive du processus suivi par l'action,
- σ , la volatilité du rendement de l'action,
- W_t , un brownien standard ;

- H5 : En temps discret, le prix de l'actif évolue, au cours de chaque période, selon deux tendances, à la hausse, auquel cas il est multiplié par le coefficient $ue^{r\Delta t}$, ou à la baisse, auquel cas il est multiplié par le coefficient $d e^{r\Delta t}$, avec $u = e^{s\sqrt{\Delta t}}$ et $d = \frac{1}{u}$.

L'évolution binomiale du prix spot de l'actif sous-jacent peut alors être représentée au cours de la première période par le schéma suivant :



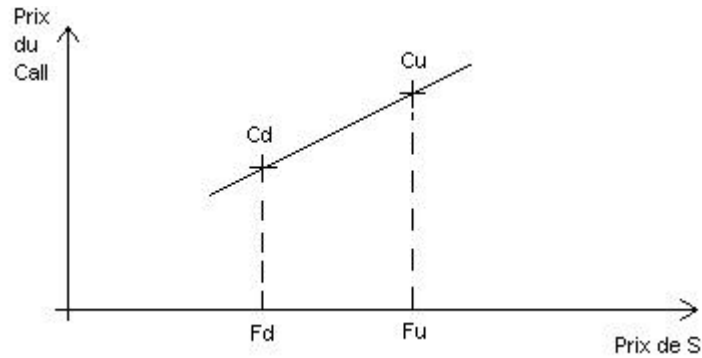
Nous notons :

$$F = S e^{r\Delta t}, S_u = S \times \left[e^{r\Delta t + s\sqrt{\Delta t}} \right] = F.u \text{ et } S_d = S \times \left[e^{r\Delta t - s\sqrt{\Delta t}} \right] = F.d$$

Le prix d'exercice et la maturité de l'option sont respectivement notés K et τ .

B. Evaluation de l'option

A présent, il est supposé que la fonction du prix de l'option peut être localement identifiée à une fonction linéaire de la valeur du sous-jacent. Le principe de l'interpolation est illustré dans le cadre d'un call européen. Soient C_u et C_d , les valeurs du call dans l'arbre pour un nœud père C et un instant donnés correspondant respectivement à la valeur de l'action S_u et S_d . Par ces deux points, il ne peut passer qu'une seule droite notée f .



L'hypothèse réalisée ci-dessus permet de retenir comme valeur de l'option au nœud père la valeur actualisée de la droite au point S.

1. Estimation des coefficients de la droite

Soient a et b deux réels. L'équation de la droite f peut s'écrire sous la forme :

$$f(S) = aS + b$$

Par hypothèse, la droite f passe par les deux points $(S_d ; C_d)$ et $(S_u ; C_u)$. Les coefficients a et b sont obtenus après résolution du système suivant :

- $C_d = a F_d + b$
- $C_u = a F_u + b$

Afin de simplifier les écritures, le changement de variables suivant est introduit :

$$a' = a \times F \qquad b' = b$$

La résolution du système conduit à :

$$a' = \frac{C_u - C_d}{u - d}$$

$$b' = C_d - a'.d$$

2. Evaluation de l'option

L'écriture formelle de l'hypothèse d'interpolation est :

$$C = E[e^{-r\Delta t} f(S_{t+\Delta t}) | S_t] \tag{1}$$

f étant une droite, sa dérivée seconde ainsi que ses suivantes sont nulles. Le développement de Taylor de f est donc :

$$f(S_{t+\Delta t}) = f(S_t) + (S_{t+\Delta t} - S_t) f'(S_t)$$

Et un simple calcul conduit à :

$$f(S_t) = \frac{a'}{e^{r\Delta t}} + b' \qquad f'(S_t) = \frac{a'}{S_t e^{r\Delta t}}$$

En conséquence, le calcul de l'espérance est possible sans connaître les probabilités de transition. Il vient :

$$\begin{aligned}
& E\left[e^{-r\Delta t} f(S_{t+\Delta t}) | S_t\right] \\
&= e^{-r\Delta t} \times E\left[f(S_t) + (S_{t+\Delta t} - S_t) f'(S_t) | S_t\right] \\
&= e^{-r\Delta t} \times \left\{ f(S_t) + E[S_{t+\Delta t} - S_t | S_t] f'(S_t) \right\} \\
&= e^{-r\Delta t} \times \left\{ \left(\frac{a'}{e^{r\Delta t}} + b' \right) + \left[(S_t e^{r\Delta t} - S_t) \frac{a'}{S_t e^{r\Delta t}} \right] \right\} \\
&= e^{-r\Delta t} \times \left\{ \left(\frac{a'}{e^{r\Delta t}} + b' \right) + \left[(e^{r\Delta t} - 1) \frac{a'}{e^{r\Delta t}} \right] \right\}
\end{aligned}$$

Et donc,

$$E\left[e^{-r\Delta t} f(S_{t+\Delta t}) | S_t\right] = e^{-r\Delta t} \times (a' + b') \quad (2)$$

La dérivée partielle du prix de l'option par rapport au sous-jacent, δ , est une donnée nécessaire à une bonne gestion du titre. La pente de la droite, a , correspond à la dérivée de f par rapport au sous-jacent. Elle pourra donc servir d'estimateur pour le δ de l'option.

C. Le modèle binomial classique adapté

A présent, nous introduisons un modèle binomial équivalent à celui de CRR (1979) dont la preuve de la convergence mathématique est proposée en annexe A. En reprenant les hypothèses H1 à H5 et en constituant un portefeuille d'arbitrage, on peut déduire la probabilité q de hausse de l'actif risqué dans l'univers risque neutre: $q = \frac{1-d}{u-d}$.

L'absence d'opportunité d'arbitrage permet d'obtenir la valeur du call au nœud père :

$$C = e^{-r\Delta t} (qC_u + (1-q)C_d) \quad (3)$$

D. Comparaison des deux modèles binomiaux

Etant donné que les deux modèles engendrent les mêmes états de la nature possibles pour la valeur du sous-jacent, les mêmes fonctions de payoff sont réalisées. En conséquence, il suffit de considérer un nœud quelconque de l'arbre et de comparer la différence entre les deux valeurs du nœud père. Pour cette raison, cette différence est établie sous l'hypothèse d'un univers monopériodique.

On indice par B la valeur du nœud père due au modèle binomial adapté et par L celle du modèle par interpolation linéaire. La différence capitalisée des équations (2) et (3) s'écrit :

$$\begin{aligned}
e^{r\Delta t} (C_B - C_L) &= qC_u + (1-q)C_d - (a' + b') \\
&= qC_u + (1-q)C_d - \left(\frac{C_u - C_d}{u-d} + C_d - d \frac{C_u - C_d}{u-d} \right) \\
&= qC_u + (1-q)C_d - \frac{1-d}{u-d} C_u - \left(1 - \frac{1-d}{u-d} \right) C_d \\
&= 0
\end{aligned}$$

Numériquement, aucune différence n'existe entre les deux modèles. Les modèles binomial adapté et par interpolation linéaire sont équivalents.

II. LE MODELE TRINOMIAL

La méthode par interpolation est étendue au cas d'un arbre trinomial. Cette fois, on postule que localement, la fonction du prix de l'option peut être appréhendée par une parabole. Comme précédemment, la méthode est reliée à celle utilisant un arbre trinomial classique.

Les hypothèses H1 à H4 sont reprises. L'hypothèse H5, adaptée au modèle trinomial, est reformulée comme suit :

H5' : Au cours de chaque période, le prix spot de l'actif évolue selon trois tendances, à la hausse, auquel cas il est multiplié par le coefficient $ue^{r\Delta t}$, à la baisse, auquel cas il est multiplié par le coefficient $d e^{r\Delta t}$ ou bien il est multiplié par $e^{r\Delta t}$.

A. Schéma d'évolution du prix du sous-jacent

L'évolution trinominale de l'actif sous-jacent peut être représentée au cours de la première période par le schéma suivant :

$$\begin{array}{l}
 S_0 \quad \begin{array}{l} \nearrow \\ \rightarrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{l} S_0 \times \left[e^{r\Delta t + 1s\sqrt{\Delta t}} \right] = S_u \\ S_0 \times e^{r\Delta t} = S_m \\ S_0 \times \left[e^{r\Delta t - 1s\sqrt{\Delta t}} \right] = S_d \end{array}
 \end{array}$$

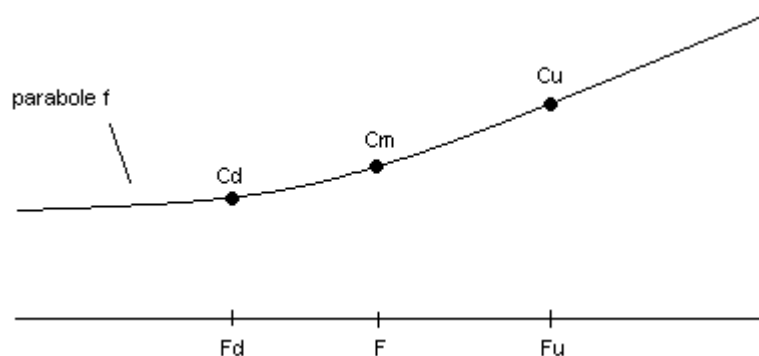
Avec :

$$u = e^{1s\sqrt{\Delta t}}, \quad d = \frac{1}{u}, \quad \lambda \text{ un réel supérieur}^2 \text{ à } 1$$

$$S_u = S \times \left[e^{r\Delta t + 1s\sqrt{\Delta t}} \right] = F \cdot u, \quad S_m = S \times e^{r\Delta t} = F \quad \text{et} \quad S_d = S \times \left[e^{r\Delta t - 1s\sqrt{\Delta t}} \right] = F \cdot d$$

B. L'induction arrière

Cette fois, il est supposé que la fonction du prix de l'option peut être localement identifiée à une fonction parabolique de la valeur du sous-jacent. Le principe de l'interpolation est illustré dans le cadre d'un call européen. Soient C_u , C_m et C_d , les valeurs du call dans l'arbre pour un nœud père et un instant donnés correspondant respectivement à la valeur de l'action S_u , S et S_d . Par ces trois points, il ne peut passer qu'une seule parabole notée f .



L'hypothèse réalisée ci-dessus permet de retenir comme valeur de l'option au nœud père la valeur actualisée de la parabole au point S.

1. Estimation des coefficients de la parabole

Soient a, b et c trois réels. L'équation de la parabole f est de la forme :

$$f(S) = aS^2 + bS + c$$

Les coefficients de cette parabole sont obtenus après résolution du système suivant :

- $C_d = a F_d^2 + b F_d + c$
- $C_m = a F^2 + b F + c$
- $C_u = a F_u^2 + b F_u + c$

Afin de faciliter les calculs, le changement de variables suivant est introduit :

$$a' = a \times F^2 \quad b' = b \times F \quad c' = c$$

La résolution du système conduit à :

$$a' = \frac{C_d + dC_u - (d+1)C_m}{d^2 - d + u - 1} \quad b' = \frac{C_u - a'(up^2 - 1) - C_m}{up - 1} \quad c' = C_m - a' - b'$$

f étant une parabole, la dérivée troisième ainsi que ses suivantes sont nulles. Le développement de Taylor de f est :

$$f(S_{t+\Delta t}) = f(S_t) + (S_{t+\Delta t} - S_t)f'(S_t) + \frac{1}{2}(S_{t+\Delta t} - S_t)^2 f''(S_t)$$

Et un léger calcul conduit à :

$$f(S_t) = \frac{a'}{e^{2rDt}} + \frac{b'}{e^{rDt}} + c' \quad f'(S_t) = \frac{2a'}{S_t e^{2rDt}} + \frac{b'}{S_t e^{rDt}} \quad f''(S_t) = \frac{2a'}{S_t^2 e^{2rDt}}$$

Le calcul de l'espérance est maintenant possible, il vient :

$$\begin{aligned} C &= E[e^{-r\Delta t} f(S_{t+\Delta t}) | S_t] \\ &= e^{-rDt} \times E\left[f(S_t) + (S_{t+Dt} - S_t)f'(S_t) + \frac{1}{2}(S_{t+Dt} - S_t)^2 f''(S_t) | S_t \right] \\ &= e^{-rDt} \times \left\{ f(S_t) + E[S_{t+Dt} - S_t | S_t]f'(S_t) + \frac{1}{2}E[(S_{t+Dt} - S_t)^2 | S_t]f''(S_t) \right\} \\ &= e^{-rDt} \times \left\{ \left(\frac{a'}{e^{2rDt}} + \frac{b'}{e^{rDt}} + c' \right) + \left[S_t e^{rDt} - S_t \left(\frac{2a'}{S_t e^{2rDt}} + \frac{b'}{S_t e^{rDt}} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{1}{2}(S_t^2 e^{2rDt+s^2Dt} - 2S_t^2 e^{rDt} + S_t^2) \frac{2a'}{S_t^2 e^{2rDt}} \right] \right\} \\ &= e^{-rDt} \times \left\{ \left(\frac{a'}{e^{2rDt}} + \frac{b'}{e^{rDt}} + c' \right) + \left[e^{rDt} - 1 \left(\frac{2a'}{e^{2rDt}} + \frac{b'}{e^{rDt}} \right) \right] + \left[\frac{1}{2}(e^{2rDt+s^2Dt} - 2e^{rDt} + 1) \frac{2a'}{e^{2rDt}} \right] \right\} \end{aligned}$$

Soit,
$$C = e^{-rDt} \times \{ a' e^{s^2Dt} + b' + c' \} \quad (4)$$

Ici, les coefficients a et b calculés en de nombreux points de l'arbre pourront servir d'estimateur respectivement aux sensibilités δ et γ (dérivée partielle et seconde du prix de l'option par rapport au prix du sous-jacent).

C. Le modèle trinomial classique adapté

Le choix d'une représentation trinomiale de l'évolution du prix de l'actif risqué sous-jacent est dû à Boyle (1986). Ce modèle est ici adapté à la forme de la diffusion du prix spot de l'actif risqué retenue précédemment. La convergence de l'approche est facilement démontrée à l'aide du théorème central limite de Lindeberg (Cf Annexe B).

Le système de probabilité régissant la dynamique du prix de l'actif risqué dans l'univers risque neutre est :

- Respect de l'espérance : $p_1 F_u + p_2 F + p_3 F_d = F$;
- Respect du moment d'ordre 2 : $p_1 F^2_u + p_2 F^2 + p_3 F^2_d = F^2 e^{\sigma^2 \Delta t}$;
- Somme des probabilités égale à 1.

La résolution du système conduit à :

$$p_1 = 1 - p_2 - p_3, \quad p_2 = 1 - p_3(1 + d) \quad \text{et} \quad p_3 = \frac{(e^{s^2 \Delta t} - 1)}{d^2 - d + u - 1}$$

La valeur du call au nœud père C est obtenue par l'actualisation des flux espérés :

$$C = e^{-r \Delta t} (p_1 C_u + p_2 C_m + p_3 C_d) \quad (5)$$

D. Comparaison des deux modèles trinomiaux

Cette fois encore, étant donné que les deux modèles engendrent les mêmes valeurs du sous-jacent dans les différents états de la nature possibles, il suffit de se placer à un nœud quelconque de l'arbre et de comparer la différence entre les deux valeurs du nœud père. Afin de simplifier le problème, il est similaire de considérer un modèle monopériodique et d'estimer l'écart capitalisé entre les équations (4) et (5).

La valeur du prix du call au nœud père du modèle trinomial classique est repérée par l'indice T et celui du modèle parabolique par P.

$$\begin{aligned} e^{r \Delta t} (C_T - C_P) &= p_1 C_u + p_2 C_m + p_3 C_d - (a' e^{s^2 \Delta t} + b' + c') \\ &= p_1 C_u + p_2 C_m + p_3 C_d - (a' (e^{s^2 \Delta t} - 1) + C_m) \\ &= p_1 C_u + p_2 C_m + p_3 C_d - C_d \frac{e^{s^2 \Delta t} - 1}{d^2 - d + u - 1} - C_u \frac{d(e^{s^2 \Delta t} - 1)}{d^2 - d + u - 1} - C_m \left[1 - \frac{(e^{s^2 \Delta t} - 1)(d + 1)}{d^2 - d + u - 1} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Le constat est le même que pour le modèle binomial : les deux modèles trinomiaux sont équivalents.

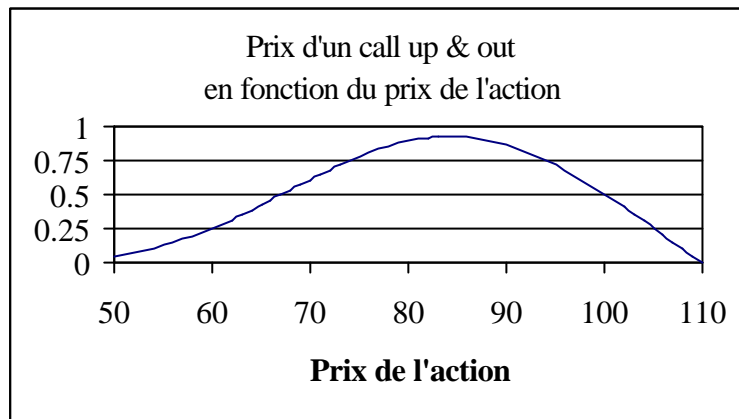
III. EXTENSION AUX OPTIONS EXOTIQUES

La méthode par interpolation proposée ne nécessite pas le calcul des probabilités. Les liens établis avec les méthodes par arbre classiques révèle l'intérêt de cette méthode. A présent, le procédé est étendu aux options à barrière puis aux options à plusieurs actifs risqués dont la matrice des variances - covariances des rendements est diagonale.

A. Option à barrière

Comme le soulignent Boyle et Lau (1994), une utilisation "naïve" du modèle binomial de CRR peut conduire à d'importantes erreurs dans l'évaluation des options à barrière. En 1995, Ritchken puis Cheuk et Vorst ont proposé de mettre à profit la souplesse du modèle trinomial de Boyle pour apporter une solution à l'évaluation de ces options. Leurs méthodes consistent à faire coïncider l'un des niveaux de prix de l'actif risqué avec la valeur de la barrière. L'arbre d'évolution ainsi construit permet de respecter la distribution mathématique du prix de l'option.

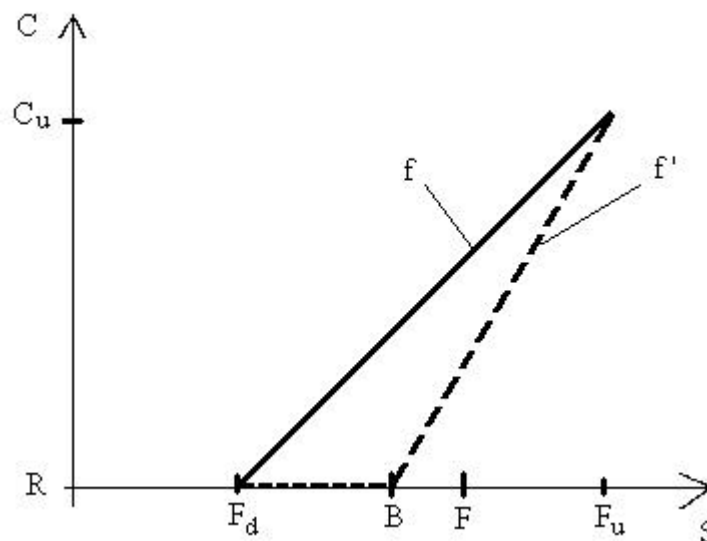
L'approche par interpolation binomiale³ peut être utilement adaptée à l'évaluation des options à barrière. La fonction du prix de l'option par rapport au prix de l'actif risqué n'est plus forcément convexe comme le montre le graphique ci-dessous dans le cas d'un call de type *up & out*. Elle peut toutefois être approchée localement par une fonction linéaire.



avec : $K=90$; $r = 5\%$; $\tau = 1$ an ; $\sigma = 25\%$; Barrière = 110.

Afin d'illustrer la modification nécessaire à ce type d'évaluation, un univers monopériodique est considéré. Le cas d'un call down and out est retenu pour la présentation de la méthode.

Le graphique suivant montre qu'une utilisation "naïve" de la méthode par interpolation peut fortement biaiser le prix de l'option. A l'instar du modèle de CRR, l'hypothèse d'interpolation linéaire appliquée à l'évaluation d'une option à barrière engendre une surestimation du prix de l'option. En fait, au voisinage de la barrière, le prix de l'option ne devrait pas être estimé par une simple fonction linéaire f comme précédemment. Une fonction continue linéaire par morceaux f' semble plus appropriée.



Où la valeur de la barrière est notée B et le rebate R.

Il suffit de remplacer la fonction f par la fonction f' que l'on calcule aisément selon le procédé déjà utilisé pour les arbres binomial et trinomial. Soient a et b deux réels. f' est de la forme : $f'(S) = aS + b$ si $S > B$ et $f'(S) = R$ si $S \leq B$.

Seule la demi-droite $S > B$ est intéressante. Un rapide calcul permet d'obtenir les valeurs de a et de b : $a = \frac{R - C_u}{B - F_u}$ et $b = R - aB$.

A l'aide d'un développement de Taylor à l'ordre 1 et par actualisation de la valeur de la fonction f' du call *down & out*, il vient :

$$C = e^{-r\Delta t} \{aF + b\} \quad (6)$$

La mise en œuvre du modèle multipériodique implique la conjugaison de l'approche linéaire primaire lorsque, pour un schéma binomial donné, le prix de l'actif ne franchit pas la barrière, et l'adaptation proposée, lorsque le prix de l'actif franchit la barrière. Il peut être montré que localement la volatilité du rendement du prix de l'actif, résultant de cette interpolation, n'est plus alors en adéquation avec la volatilité du rendement en continu. En annexe C, un exemple d'évolution des arbres de prix de l'actif sous-jacent et du call est développé.

B. Option dépendant de plusieurs actifs risqués

L'approche par interpolation peut être étendue au cas d'une option à plusieurs actifs risqués dont les rendements sont indépendants. Toutefois, le principe de la méthode est présenté dans le cas d'une option ne reposant que sur deux actifs.

Les hypothèses H1 à H3 sont reprises.

Dans l'univers risque neutre, les processus de diffusion des actifs S et T sont respectivement les suivants :

$$\begin{aligned} dS &= Srdt + S\sigma_S dW_t \\ dT &= Trdt + T\sigma_T dV_t \end{aligned}$$

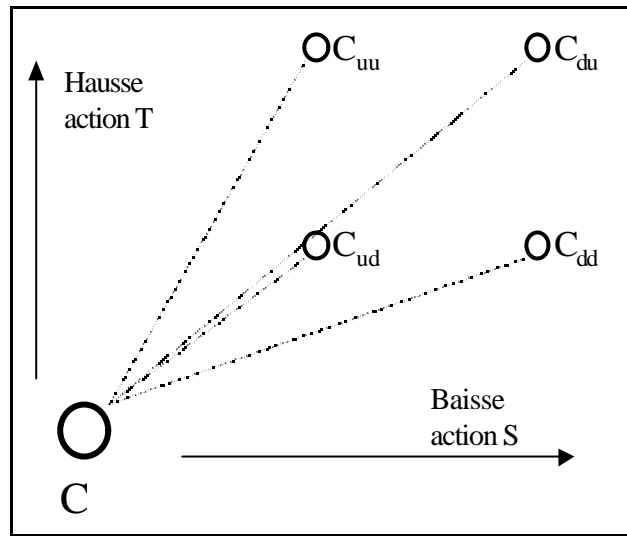
Où :

- S_t (resp. T_t) est le prix de l'action 1 (resp. 2) à l'instant t ;
- σ_S (resp. σ_T) est la volatilité du rendement de l'action 1 (resp. 2) ;
- W_t (resp. V_t) est un brownien standard propre à l'action 1 (resp. 2) ; $dW_t dV_t = 0$.

L'évolution du prix des actifs risqués est représentée par des processus binomiaux orthogonaux identiques à celui du modèle binomial linéaire. En conséquence, l'évolution du prix de l'option peut être représentée par un arbre quadrimomial.

On note : $u_S = e^{s_S \sqrt{\Delta t}} = \frac{1}{d_S}$ et $u_T = e^{s_T \sqrt{\Delta t}} = \frac{1}{d_T}$.

Les valeurs correspondantes de l'option sont :



Tandis que dans les cas précédents, une courbe suffisait pour appréhender le prix de l'option, une surface est ici nécessaire⁴. Il est possible de choisir une surface f ayant la forme suivante :

$$f(S, T) = aST + bS + cT + d$$

Le calcul du prix de l'option s'effectue par celui de l'espérance de la fonction f actualisée. Après calcul, il vient (Cf annexe D) :

$$C = E\left[e^{-r\Delta t} f(S_{t+\Delta t}, T_{t+\Delta t}) \middle| S_t, T_t\right] = e^{-r\Delta t} \left[\frac{a'}{e^{r\Delta t}} \left(2 - \frac{1}{e^{r\Delta t}} - (e^{r\Delta t} - 1)^2 \right) + b' + c' + d' \right] \quad (7)$$

Où les coefficients a' , b' , c' et d' sont donnés par :

$$a' = \frac{C_{uu} - C_{ud} - C_{du} + C_{dd}}{(u_T - d_T)(u_S - d_S)} \quad b' = \frac{1}{d_S - u_S} \{C_{du} - C_{uu} - a'(d_S u_T - u_S u_T)\}$$

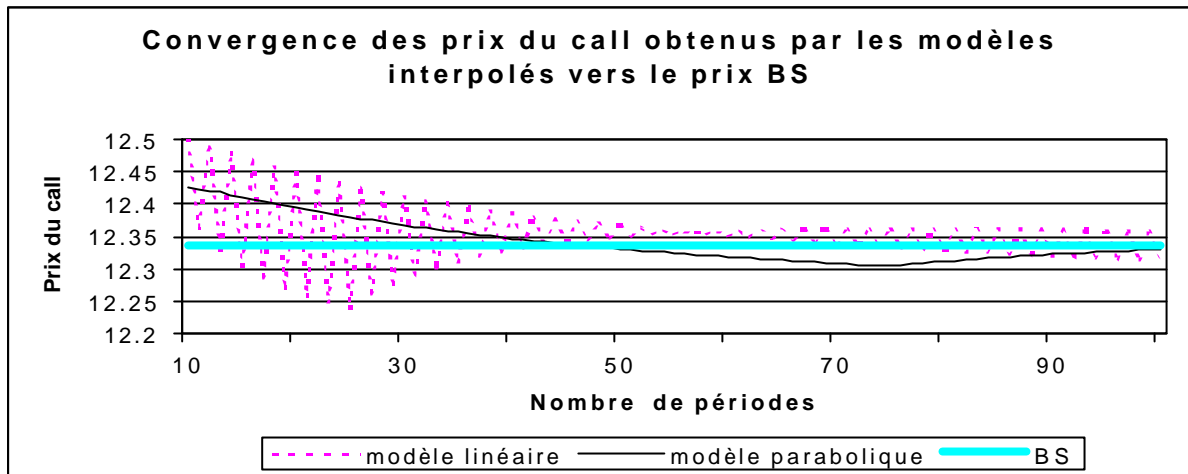
$$c' = \frac{C_{ud} - C_{uu}}{(d_T - u_T)} - a' u_S \quad d' = C_{uu} - a' u_S u_T - b' u_S - c' u_T$$

IV. APPLICATIONS NUMERIQUES

Dans cette dernière section, les méthodes d'évaluation proposées sont mises en œuvre. La convergence numérique des approches linéaires et paraboliques est illustrée dans le cas d'une option européenne. Puis, la convergence numérique des extensions de la méthode par interpolation aux cas des options à barrière et à celui des options à deux actifs risqués est ensuite vérifiée à l'aide de deux call.

Données initiales :

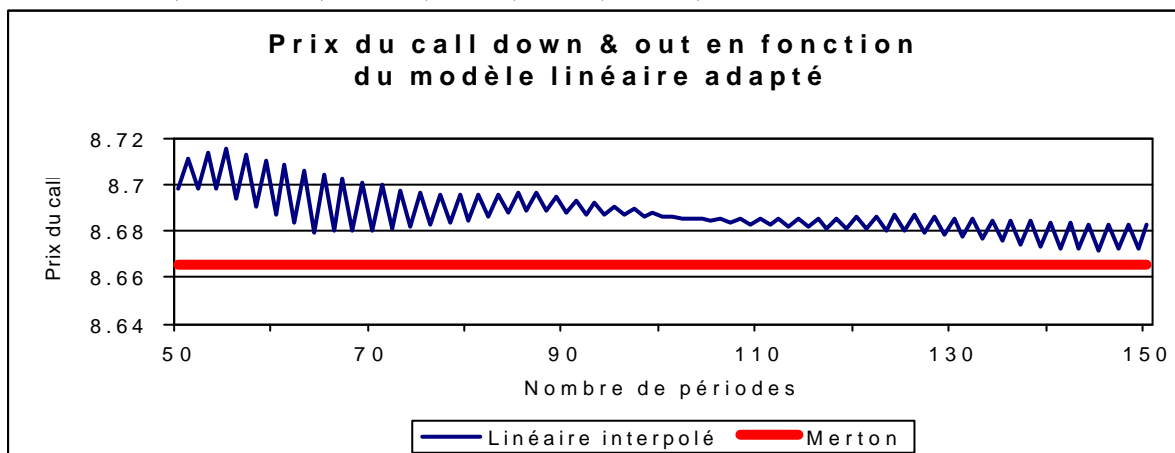
Call ; $S = 100$; $K = 100$; $\sigma : 25\%$; $r : 5\%$; $\tau : 1$ an ; $\lambda = 3^{1/2}$



Dans ce premier graphique, les oscillations typiques des modèles binomiaux et la convergence plus lissée des modèles trinomiaux est retrouvée. Les erreurs relatives des deux approches sont comparables à celles obtenues par les modèles originaux de CRR et de Boyle.

Données initiales :

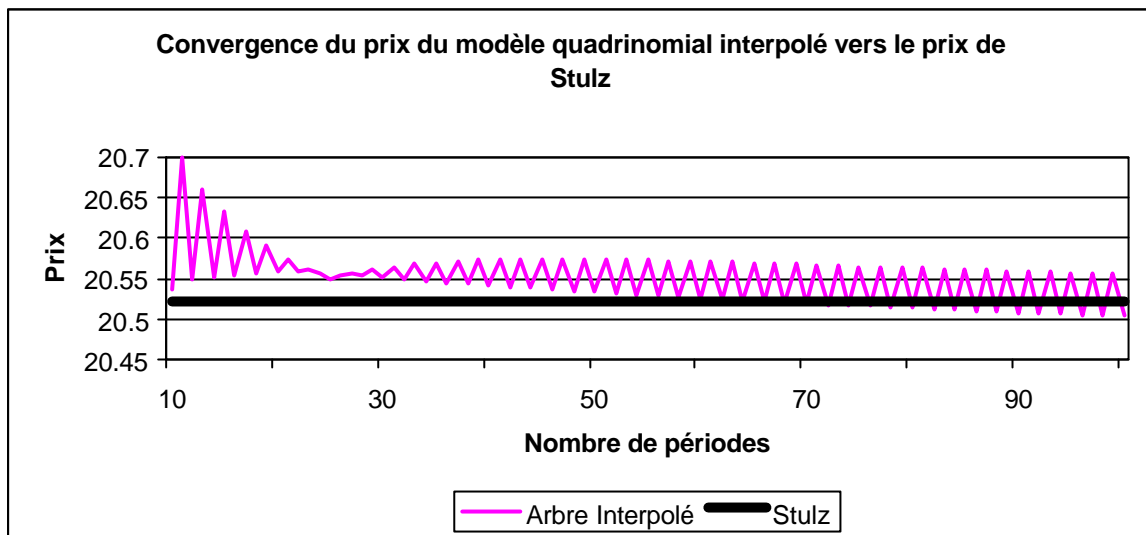
Call down & out ; $S = K = 100$; $\sigma = 20\%$; $B = 90$; $r = 5\%$; $\tau = 1$ an ; $R = 0$.



Le biais local introduit sur la volatilité du rendement de l'actif risqué n'a qu'une très faible incidence sur la valeur de l'option. En revanche, le gain résultant de l'adaptation de la méthode aux options à barrière est considérable par rapport aux modèles binomiaux classiques. Dans l'exemple traité, l'erreur relative est inférieure à 0,5 % pour un nombre de périodes supérieurs à 100 tandis que pour le modèle de CRR des pics d'erreurs relatives supérieurs à 10 % sont obtenus, l'erreur moyenne étant environ dix fois supérieure à celle atteinte avec le modèle interpolé.

Données initiales :

Call rainbow sur 2 actifs ; $S : 100$; $\sigma_S : 25\%$; $T : 95$; $\sigma_T : 30\%$; $K = 100$; $r : 5\%$; $\tau = 1$ an



L'exemple sur un call 2-color rainbow montre bien que localement la fonction du prix du call peut être approchée par une surface de la forme $f(S, T) = aST + bS + cT + d$. D'autres tests ont été réalisés avec des arbres hexanomial et nonomial permettant de mieux prendre en compte la convexité de la fonction par l'intermédiaire de termes en S^2 , T^2 ... Malgré la diminution de l'erreur relative commise, les temps de calculs ne justifient pas d'alourdir l'approche.

Conclusion :

Comme nous l'avons démontré, les approches par arbre de prix interpolés correspondent à des méthodes traditionnelles. Ces méthodes permettent de transcrire la convexité du prix des options en fonction de la valeur du prix de l'actif sous-jacent. Sous certaines conditions, les options à barrière et les options contingentes à plusieurs actifs risqués peuvent être évaluées par cette approche. Une extension immédiate aux options à barrière outside aurait pu être proposée. Toutefois, cette méthode ne peut être appliquée qu'avec une extrême précaution. Les liens établis avec les approches traditionnelles prouvent que les coefficients multiplicatifs de hausse et de baisse du prix de l'actif risqué n'ont pas été arbitrairement choisis. Ils correspondent aux coefficients qui assurent la convergence mathématique du prix de l'option.

ANNEXES

Annexe A : Convergence du modèle binomial classique adapté

La preuve de la convergence du modèle binomial adapté peut être obtenue de la même manière que pour le modèle binomial simple. La preuve apportée ici n'est donc que partielle et a pour but de montrer que le modèle adapté vérifie les contraintes suffisantes des théorèmes mis en œuvre par CRR pour démontrer la convergence en loi du modèle vers celui de BS.

Soit S^* une valeur de l'actif risqué au bout de n périodes.

A l'instar du modèle de CRR, il est aisé de vérifier que le modèle adapté vérifie :

$$E\left[\log\left(\frac{S^*}{S}\right)\right] = \left[q \log\left(\frac{u}{d}\right) + \log d\right] n = \hat{m} \quad \text{Var}\left[\log\left(\frac{S^*}{S}\right)\right] = q(1-q) \left[\log\left(\frac{u}{d}\right)\right]^2 n = \hat{s}^2 n$$

Où q désigne la probabilité de hausse de l'actif risqué dans l'univers risque neutre.

Pour que la convergence soit assurée, il est nécessaire que :

$$\left. \begin{array}{l} \left[q \log\left(\frac{u}{d}\right) + \log d \right] n \rightarrow \mathbf{m} \\ q(1-q) \left[\log\left(\frac{u}{d}\right) \right]^2 n \rightarrow \mathbf{s}^2 t \end{array} \right\} \text{lorsque } n \rightarrow \infty.$$

A l'aide de développements limités, on vérifie que les paramètres :

$$\bar{u} = e^{rD+s\sqrt{D}} \quad \bar{d} = e^{rD-s\sqrt{D}} \quad q = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} s \sqrt{Dt}$$

permettent d'obtenir pour tout n :

$$\hat{\mathbf{m}} = \mathbf{m} \text{ et } \hat{\mathbf{s}}^2 n = \mathbf{s}^2 \left[1 - \frac{1}{4} \frac{\mathbf{s}^2}{n} \right] t$$

Et par conséquent, lorsque $n \rightarrow \infty$, $\hat{\mathbf{m}} = \mathbf{m}$ et $\hat{\mathbf{s}}^2 n = \mathbf{s}^2 t$. Remarquons toutefois que le nombre de périodes de discrétisation de l'intervalle de gestion doit être suffisamment grand pour assurer l'existence de la probabilité q (q doit être strictement comprise entre 0 et 1).

De là, on peut appliquer le théorème central limite qui permet d'assurer la convergence suivante lorsque $n \rightarrow \infty$:

$$Prob \left(\frac{\log \frac{S^*}{S} - \hat{\mathbf{m}}}{\hat{\mathbf{s}} \sqrt{n}} \leq z \right) \rightarrow N(z)$$

Par ailleurs, lorsque $n \rightarrow \infty$, il est facile de vérifier que la probabilité q vaut 1/2 et donc aucun phénomène d'absorption n'en résulte.

Enfin, les autres résultats nécessaires à la démonstration de la convergence dépendent spécifiquement du rapport $\frac{u}{d}$ du modèle de CRR. Or celui-ci est égal au rapport $\frac{\bar{u}}{\bar{d}}$ du modèle adapté.

L'ensemble de ces résultats permettent d'assurer la convergence de l'approche vers le modèle de Black et Scholes comme l'ont montrée CRR.

Annexe B : Convergence du modèle trinomial adapté

Ce théorème a notamment été utilisé par Tian (1993) dans le cadre de modèles binomial et trinomial d'évaluation d'actif optionnel. Nous en reprenons la présentation.

Les conditions du théorème central limite de Lindeberg, appliquées à un modèle trinomial, sont :

- Les probabilités p_1 , p_2 et p_3 appartiennent à l'intervalle ouvert] 0; 1[et ne convergent pas vers ces bords;
- La somme des probabilités vaut 1 ;
- Les coefficients multiplicatifs u , m et d de hausse, de tendance moyenne et de baisse sont indépendants du niveau du prix de l'actif ;
- La moyenne de la distribution trinominale est égale à la moyenne de la distribution lognormale ;
- La variance de la distribution trinominale est égale à la variance de la distribution lognormale.

Mathématiquement, ces hypothèses peuvent être restreintes aux conditions :

- $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, $0 < p_1, p_2, p_3 < 1$
- $p_1 u + p_2 m + p_3 d = M$
- $p_1 u^2 + p_2 m^2 + p_3 d^2 = M^2 V$

où u , m et d sont des constantes et, $M = e^{rD}$ et $V = e^{s^2 D}$.

L'application directe de ce théorème assure la convergence de l'approche trinominale adaptée.

Annexe C : Application numérique du modèle binomial au cas d'un call down & out

Le modèle linéaire est ici appliqué au cas d'un call down & out avec les données initiales suivantes :

$S = K = 100$; $\sigma = 20\%$; $B = 90$; $r = 5\%$; $\tau = 1$ an ; $R = 0$; Nombre de périodes : 7.

Arbre d'évolution du prix de l'actif risqué

						178.45	
					164.28		
				151.24		153.41	
			139.23		141.23		
		128.17		130.02		131.89	
	117.99		119.69		121.41		
	108.63	110.19		111.77		113.38	
100		101.44	102.90		104.38		
	93.38		96.09			97.47	
		87.21		88.46		89.73	
			81.44		82.61		83.80
				76.05		77.14	
					71.02		72.04
						66.32	
							61.93

Arbre d'évolution du prix du call down & out

						78.45	
					64.99		
				52.66		53.41	
			41.35		41.94		
		31.17		31.44		31.89	
	22.51		22.16		22.13		
	15.29	14.79		13.86		13.38	
8.90		8.82	8.16		6.39		
	3.10		3.40		2.99	0.00	
		0.00		0.00		0.00	
			0.00		0.00		0.00
				0.00		0.00	
					0.00		0.00
						0.00	
							0.00

Annexe D : Calcul de l'espérance de l'option dépendant de deux actifs

La fonction f :

$$f(S, T) = aST + bS + cT + d$$

L'hypothèse d'interpolation permet d'évaluer les coefficients a , b , c et d par l'intermédiaire du système suivant :

- $C_{uu} = aSTe^{2r\Delta t}u_Su_T + bSe^{r\Delta t}u_S + cTe^{r\Delta t}u_T + d$
- $C_{du} = aSTe^{2r\Delta t}d_Su_T + bSe^{r\Delta t}d_S + cTe^{r\Delta t}u_T + d$
- $C_{ud} = aSTe^{2r\Delta t}u_Sd_T + bSe^{r\Delta t}u_S + cTe^{r\Delta t}d_T + d$
- $C_{dd} = aSTe^{2r\Delta t}d_Sd_T + bSe^{r\Delta t}d_S + cTe^{r\Delta t}d_T + d$

Afin de simplifier les équations, le changement de variable suivant est introduit :

$$a' = aSTe^{2r\Delta t}, \quad b' = bSe^{r\Delta t}, \quad c' = cTe^{r\Delta t} \quad \text{et} \quad d' = d$$

La résolution du système aboutit aux valeurs a' , b' , c' et d' suivantes :

$$a' = \frac{C_{uu} - C_{ud} - C_{du} + C_{dd}}{(u_T - d_T)(u_S - d_S)} \qquad b' = \frac{1}{d_S - u_S} \{C_{du} - C_{uu} - a'(d_Su_T - u_Su_T)\}$$

$$c' = \frac{C_{ud} - C_{uu}}{(d_T - u_T)} - a'u_S \qquad d' = C_{uu} - a'u_Su_T - b'u_S - c'u_T$$

Toutes les dérivées de degré 3 de la fonction f sont nulles. De ce fait, à l'aide du développement de Taylor, il vient :

$$f(S_{t+\Delta t}, T_{t+\Delta t}) = aS_{t+\Delta t}T_{t+\Delta t} + bS_{t+\Delta t} + cT_{t+\Delta t} + d$$

$$= f(S_t, T_t) + (S_{t+\Delta t} - S_t)f_S(S_t, T_{t+\Delta t}) + (T_{t+\Delta t} - T_t)f_T(S_{t+\Delta t}, T_t)$$

$$+ \frac{1}{2}(S_{t+\Delta t} - S_t)^2 f_{SS}(S_t, T_{t+\Delta t}) + \frac{1}{2}(T_{t+\Delta t} - T_t)^2 f_{TT}(S_{t+\Delta t}, T_t) + (S_{t+\Delta t} - S_t)(T_{t+\Delta t} - T_t)f_{ST}(S_t, T_t)$$

Un rapide calcul conduit à :

$$f(S_t, T_t) = \frac{a'}{e^{2r\Delta t}} + \frac{b'}{e^{r\Delta t}} + \frac{c'}{e^{r\Delta t}} + d' \qquad f_{ST}(S_t, T_{t+\Delta t}) = \frac{a'}{STe^{2r\Delta t}}$$

$$f_S(S_t, T_{t+\Delta t}) = \frac{a'}{S_t e^{2r\Delta t}} + \frac{b'}{S_t e^{r\Delta t}} \qquad f_{SS}(S_t, T_{t+\Delta t}) = 0$$

$$f_T(S_{t+\Delta t}, T_t) = \frac{a'}{T_t e^{2r\Delta t}} + \frac{c'}{T_t e^{r\Delta t}} \qquad f_{TT}(S_{t+\Delta t}, T_t) = 0$$

La remontée de l'arbre s'effectue par le calcul de l'espérance de la fonction f actualisée.

$$E\left[e^{-r\Delta t} f(S_{t+\Delta t}, T_{t+\Delta t}) \middle| S_t, T_t\right]$$

$$= e^{-r\Delta t} \left[\frac{a'}{e^{2r\Delta t}} + \frac{b'}{e^{r\Delta t}} + \frac{c'}{e^{r\Delta t}} + d' \right] + (1 - e^{-r\Delta t}) \left(\frac{a'}{e^{2r\Delta t}} + \frac{b'}{e^{r\Delta t}} \right) + (1 - e^{-r\Delta t}) \left(\frac{a'}{e^{2r\Delta t}} + \frac{c'}{e^{r\Delta t}} \right)$$

$$+ (1 - e^{-r\Delta t}) (e^{r\Delta t} - 1) \frac{a'}{e^{2r\Delta t}}$$

$$= e^{-r\Delta t} \left[d' + \frac{2a'}{e^{r\Delta t}} + b' + c' - \frac{a'}{e^{2r\Delta t}} \right] + (1 - e^{-r\Delta t}) (e^{r\Delta t} - 1) \frac{a'}{e^{2r\Delta t}}$$

$$= e^{-r\Delta t} \left[\frac{a'}{e^{r\Delta t}} \left(2 - \frac{1}{e^{r\Delta t}} - (e^{r\Delta t} - 1)^2 \right) + b' + c' + d' \right]$$

¹ Un agent économique est supposé rationnel lorsqu'il préfère posséder plus que posséder moins.

² Le premier modèle trinomial d'évaluation d'une option est dû à Boyle en 1986. Le paramètre λ introduit par Boyle doit être ajusté de sorte à ce que les trois probabilités de transition du prix de l'actif au sein de l'arbre soient cohérentes. Une première condition étant $\lambda > 1$.

³ L'évaluation des options à barrière selon le modèle trinomial peut présenter une difficulté qui peut être résolue selon différents procédés, notamment en ayant recours localement à une interpolation linéaire.

⁴ Selon le type d'option dépendant de plusieurs actifs considéré, le prix de l'option n'est pas convexe par rapport à chacun des actifs.

Références bibliographiques

AUGROS J. C. et **MORENO M.**, "Evaluation séquentielle d'un actif contingent à plusieurs actifs risqués", Séminaire AFFI, 4 décembre 1998.

AUGROS J. C. et **MORENO M.**, "Evaluation partiellement séquentielle des options à barrière", Séminaire Lyon-Lausanne, 3 décembre 1998.

BARRAQUAND et **MARTINEAU**, "Numerical Valuation of High Dimensional Multivariate American Securities", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, n°30, 1995, pp 383-405.

BLACK F. et **SCHOLES F.**, "The pricing of options and corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, Vol 81, n°3, 1973, p 637-659.

BOYLE P. et **HOON LAU S.**, "Bumping Up Against the Barrier with the Binomial Method", *The Journal of Derivatives*, summer 1994.

BOYLE P.P., **EVNINE J.** et **GIBBS S.**, "Numerical Evaluation of Multivariate Contingent Claims", *Review of Financial Studies*, vol 2, n°2, 1989, p 241-250.

CHEUK T. et **VORST T.**, "Complex Barrier Options", *The Journal of Derivatives*, fall 1996.

COX J., **ROSS S.** et **RUBINSTEIN M.**, "Option Pricing : A Simplified Approach", *Journal of Financial Economics*, Vol 7, 1979, p 229-264.

HULL J.C., "*Options, Futures and Other Derivatives*", Prentice Hall, International Edition, third edition, 1997.

MERTON R.C., "Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, Printemps 1973.

REIMER M. et **SANDMANN K.**, "A discrete Time Approach for European and American Barrier Options", *Document téléchargé sur Internet*, Université de Bonn, département de statistique, Mars 1995.

RICH D., "The Mathematical Foundations of Barrier Option-Pricing Theory", *Advances in Futures and Options Research*, 1994, Vol 7, p 267-311.

RITCHKEN P., "On Pricing Barrier Options", *The Journal of Derivatives*, Winter 1995, p 19-28.

REINER E. et **RUBINSTEIN M.**, "Breaking Down the Barriers", *Risk*, September 1991, p 28-35.

TIAN Y., "A Modified Lattice Approach to Option Pricing", *Journal of Futures Markets*, vol 13, n°5, août 1993, p 563-577.